SYST0002 – Introduction aux signaux et systèmes

Examen

5 janvier 2023

Consignes

- Durée : 3h00.
- Une nouvelle feuille pour chacune des 3 questions.
- Indiquez votre nom, prénom et matricule sur chaque feuille.
- Appareils électroniques (calculatrice, GSM, etc.) non admis.

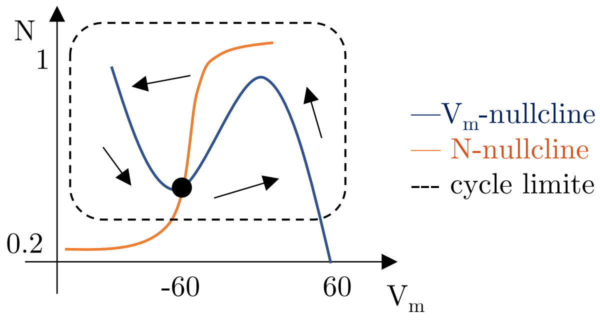
Justifiez toujours vos réponses.

Question 1 On s'intéresse à l'activité électrique d'un neurone. La tension membranaire V_m évolue selon le système d'équations différentielles suivant :

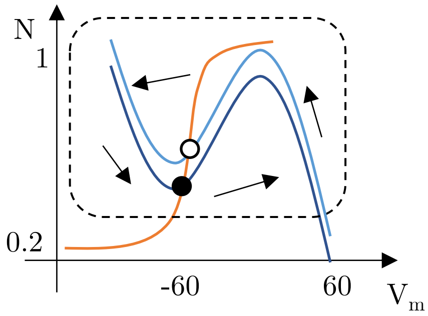
$$C_m \dot{V}_m = -I_{Ca} - I_K - I_L + I_{\text{app}}$$

$$\tau_N(V)\dot{N} = N_\infty(V) - N$$

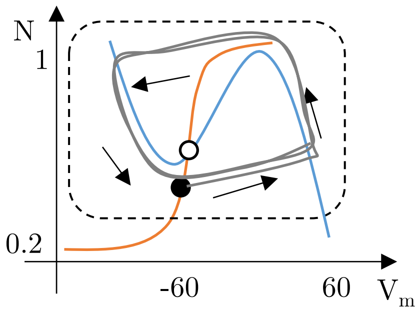
avec C_m la capacité membranaire, I_{Ca} le courant calcique, I_K le courant potassique, I_L le courant leak et I_{app} le courant appliqué. La variable N peut être considérée comme une variable d'adaptation. N_∞ est une fonction sigmoidale qui vaut en 0.2 lorsque V_m est petit.
Le plan de phase est donné à la Figure ci dessous pour $I_{\text{app}} = 0$ $[nA/cm^2]$. Comme expliqué dans le devoir, le champ de vecteurs est piégé dans un cycle limite (dessiné en trait pointillé). Plus d'informations sur la modélisation d'un neurone est disponible en annexe. C'est une copier coller de la figure du devoir.



(i) Dessinez le plan de phase quand un petit courant positif est appliqué. Expliquez brièvement votre raisonnement.
total : 1.5 = Dessin : /1 + Explication : 0.5 Le courant appliqué affecte uniquement la première nullcline. Lorsque l'on applique un courant positif, la nullcline se déplace vers le haut (trait bleu clair).



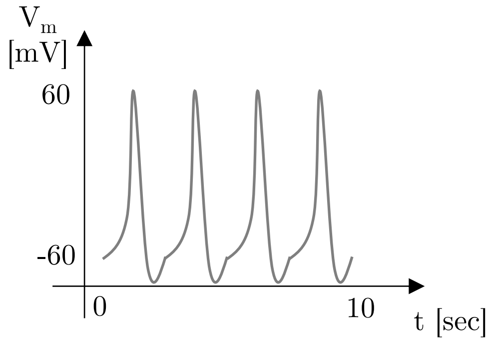
(ii) Avec ce courant appliqué, le point fixe est alors caractérisé par des valeurs propres sous la forme de complexe conjugué telles que : $\lambda_1 = \alpha + j\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - j\beta$ avec α et β, des constantes positives. Tracez la trajectoire dans le plan de phase. Expliquez votre raisonnement. total : 2 = Nullcines : /0.5 + trajectoire /0.5 + Explication : /1 La trajectoire est dessiné en trait gris. La dynamique du système est gouverné par une spirale instable. La trajectoire tend à s'éloigner du point en oscillant mais est piégée par le cycle limite.



(iii) Donnez l'évolution temporelle de la tension membranaire durant 10 secondes. Indiquez clairement l'axe des abscisses et des ordonnées avec des valeurs clés. L'allure peut être dessinée de manière qualitative tout en respectant les contraintes du système décrites dans le plan de phase. Les étudiant·es peuvent juste avoir dessiner quelques spikes, la fréquence n'est pas donnée.
total : 1 = Dessin : /0.5 + respect contrainte : /0.5 La tension membranaire oscille sous la forme de potentiel d'action. L'amplitude fluctue entre -60 et 60mV.

(iv) Que se passe-t'il si le neurone a une plus petite capacité membranaire ? Expliquez comment cela impacte le plan de phase et l'évolution temporelle de la tension membranaire. total : 1 La capacité membranaire multiplie la première équation $\dot{V} = 1/C(...)$. Dès lors, réduire la capacité fait croitre la valeur de la vitesse horizontale donnée par $\dot{V}$. Les flèches du champ de vecteur sont plus grandes selon l'horizontale. Pour l'évolution temporelle, puisque la vitesse est accélérée, cela se traduit par une augmentation de la fréquence des potentiels d'action.

(v) On s'intéresse à un autre type de neurone dans une autre région du

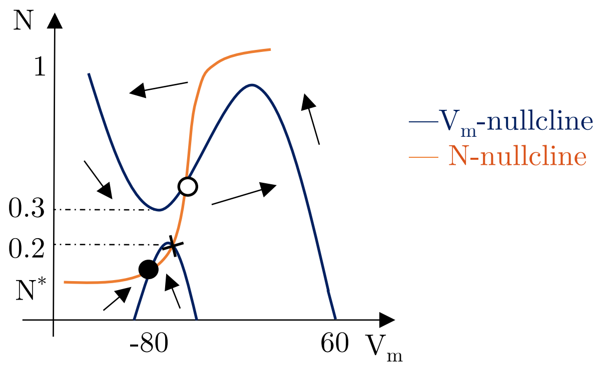


cerveau. Le système devient :

$$C\dot{V} = -I_{Ca} - I_K - I_L - I_X + I_{\text{app}}$$

$$\tau_N(V)\dot{N} = N_\infty(V) + N^* - N$$

avec un nouveau courant I_X qui modifie le plan de phase comme illustré à la Figure ci-dessous et N^* qui est une constante comprise dans l'intervalle $[0\,;\,0.3[$. Sur le dessin, N^* est égal à 0.1. On voit apparaitre un point fixe stable (rond noir), un point fixe instable (rond blanc) et un point de selle (croix). Il manque une flèche dans le champ de vecteur afin de donner une image globale de la dynamique du système. Donnez le sens de la flèche du champ de vecteur dans le secteur manquant. Expliquez votre décision.



total : 1 = 0.5 (sens) + 0.5 (explication) La flèche pointe vers la gauche et le bas. Elle est contrainte par le point fixe et le point de selle.

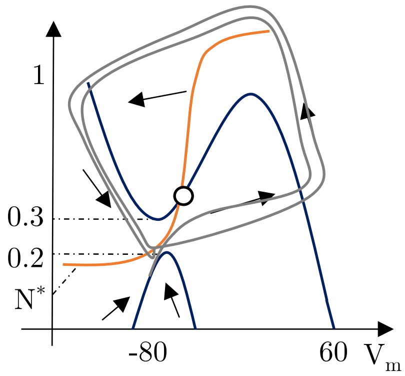
(vi) Tracez l'évolution temporelle de la tension membranaire durant 10 secondes quand les conditions initiales sont données par $V_m = -100$ et $N < N^*$.

total : 1

La tension membranaire converge directement sur le point fixe en -80mV depuis sa condition initiale en -100mV.

(vii) Lorsque le neurone est au repos, sa tension membranaire est aux alentours de -80mV. Il existe un médicament qui modifie la valeur de N^* afin que le neurone ne soit plus au repos. Expliquez le rôle de la substance chimique sur le plan de phase. Tracez la trajectoire associée avec ce changement.

total : 1.5 = Dessin : /0.5 + trajectoire 0.5 + Explication : 0.5 Il suffit que la substance chimique augmente la valeur de N^* pour que la nullcline de N soit déplacée vers le haut et fait disparaitre les deux points fixes de la branche du bas. Le neuron génère ainsi des potentiels d'actions.

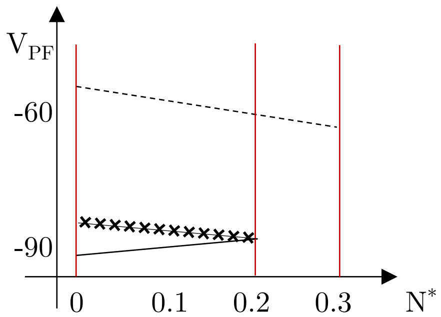


(viii) Tracez qualitativement l'évolution de l'abscisse des différents points fixes en fonction de la valeur de N^*. Indiquez une légende claire : trait continue pour un point stable, trait pointillé pour un point instable et trait avec des petites croix pour un point de selle. Expliquez votre dessin.

La réponse est correcte si les ordres de grandeur sont plus ou moins respectés.

total : 1.5 (dessin et explication) N^* est compris entre 0 et 0.3 comme indiqué dans l'énoncé. Le point fixe sur la branche du haut est toujours présent. Sa position ne change pas fort. L'abscisse du point fixe diminue légèrement. On représente cela par la droite décroissante aux alentours de -60mV.

Ensuite pour les valeurs de N^* compris entre 0 et 0.2, la sigmoide intercepte la branche du bas en deux points. Ceux ci se rapprochent l'un de l'autre plus N^* augmente,jusqu'à se rencontre en N^*=0.2. Le point de selle voit son abscisse diminuer légèrement à l'inverse pour le point fixe.

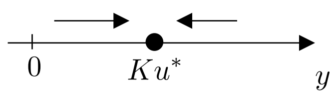


Question 2 Le systéme causal est gouverné par l'équation suivante :

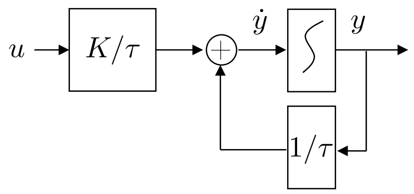
$$\tau \dot{y} + y = Ku(t)$$

oú u est l'entrée, K est un gain positif, y est la sortie et τ est une constante de temps. on peut considérer K=1 et $\tau = 5$.

(i) Donnez le plan de phase et le champ de vecteurs en indiquant le(s) point(s) fixe(s). Identifiez la stabilité du(des) point(s) fixe(s).
total : 1 (dessin 0.5 + stabilité 0.5) On se place en $\dot{y} = 0$, on obtient $y^* = Ku^*$. Le point fixe est donné par $y^* = Ku$. Le champ de vecteurs est donné à la figure suivante : Le point fixe est bien un point stable car le champ de vecteurs est attractif.
Les étudiant·es ont peut être dessiné une droite verticale pour Ku*. C'est également possible qu'ils ont tracé $\dot{y}$ en fonction de y avec une droite de la forme $1/\tau K u^* - 1/\tau y$. Lorsque $\dot{y}$ est positif, la flèche va vers la droite et si $\dot{y}$ est négatif, la flèche va vers la gauche.



(ii) Tracez le bloc diagramme associé à ce système. total 1



(iii) Donnez la fonction de transfert du système. total 1 En utilisant les propriétés des transformées de Laplace (linéarité et dérivée temporelle), la fonction de transfert est donnée par :

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

(iv) Donnez la région de convergence du système et justifiez. Est-ce que le système est stable ? Si oui, pourquoi. total 1 : ROC (0.5) + stabilité (0.5) Le système causal est défini par le plan complexe à droite du pole le plus grand. ROC = $(s \in C : \sigma > -1/\tau)$ L'axe des imaginaires est bien compris dans la ROC.

(v) Donnez la réponse impulsionnelle. Expliquez vos calculs ou citez les propriétés des transformées si vous en utilisez. Dessinez la réponse impulsionnelle. Est-ce que cela confirme que votre système est (in)stable (en fonction de ce que vous avez répondu à la question précédente) ? Expliquez pourquoi. total 2 (expression 1 + dessin 1) retirer 0.5 si ce n'est pas exactement la meme expression mais l'idée est la avec les propriétés/exponentielles.

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \mathbb{I}(t)$$

C'est une exponentielle décroissante qui commence en K/τ uniquement entre 0 et $+\infty$.

(vi) Construisez le diagramme de Nyquist pour la fonction de transfert $H(s) = \frac{1}{\tau s+1}$ pour $\tau = 5$. Expliquez votre procédure. Pour rappel, le diagramme de Nyquist représente la partie imaginaire en fonction de la partie réelle de la fonction de transfert. Indiquez vos valeurs en $\omega = 0$ [rad/s] et en $\omega = 1/\tau = 1/5 = 0.2$ [rad/s]. Indiquez la direction lorsque ω croit.

total 2.5 = décomposition partie réelle et imaginaire 0.5 + procédure 0.5+ dessin final 0.5 (allure) + valeur algébrique correcte (0.5) + w croit (0.5)

Pour la procédure, on pouvait également retrouver l'équation du cercle /ellipse algébriquement.

On part de l'expression de la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\tau\omega + 1} = \frac{1 - j\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2}$$

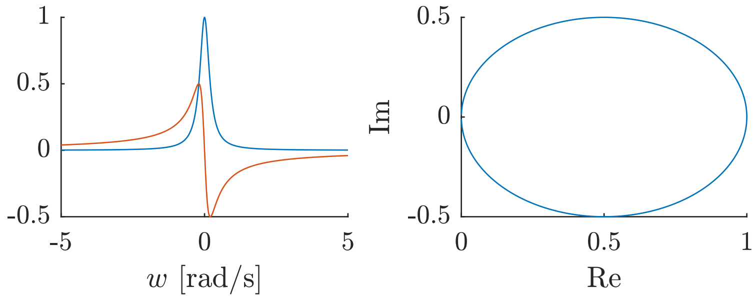
que l'on décompose en partie réelle et imagine :

$$Re(\omega) = \frac{1}{1 + (\tau\omega)^2} \qquad Im(\omega) = \frac{-\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2}$$

La partie réelle vaut 1 en $\omega = 0$ [rad/s], est toujours positive et tend vers 0 en $\omega \to \pm\infty$ (courbe bleue). La partie imagine est nulle en $\omega = 0$ [rad/s], est maximum et vaut 1/2 en $-1/\tau$ et -1/2 en $1/\tau$ (courbe orange).

Le diagramme de Nyquist s'obtient en dessinant la partie imaginaire en fonction de la partie réelle. On obtient une ellipse. En $\omega = 0$, on est sur le point (1,0), en $\omega = 1/\tau$, on est sur le point (0.5 ; -0.5).

On tourne dans le sens des aiguilles d'une montre pour ω qui croit.



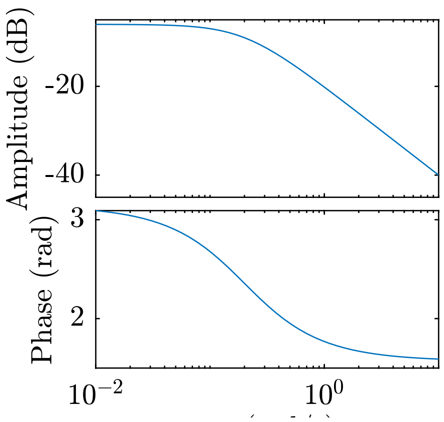
(vii) La fonction de transfert est mise en série avec un système décrit avec un gain de $G(s) = -0.5$. Dessinez le diagramme de Bode en amplitude et en phase de la fonction de transfert totale $H(s)G(s)$. Expliquez votre raisonnement. Indiquez clairement la valeur du gain statique. total 4 =

allure amplitude (1) + allure phase (1) + gain statique correcte sur le graphique (0.5) + valeur exacte pour la phase (0.5) car la plupart vont oublié le π du -0.5 + explication (1)

La fonction de transfert total est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{-0.5}{\tau s+1}$$

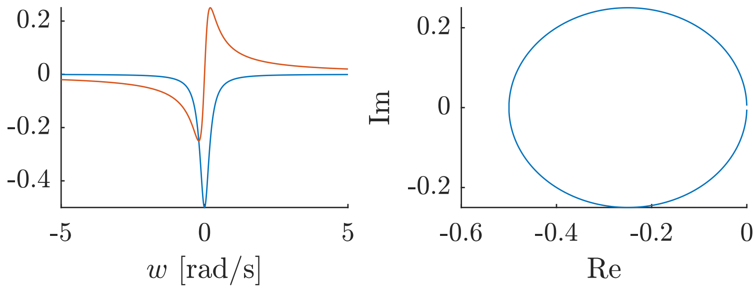
Le gain statique est donné par : 0.5 cad -20log(2) = -6dB.
A partir $\omega = 1/\tau$, l'amplitude commence à chuter de -20dB/dec. La phase de H(s) passait de 0 rad à $-\pi/2$ avec une pente de -$\pi/4$ rad/dec entre 1/50 ($= 1/10\tau$) et 5 ($=10/\tau$). Le moins amène un terme dans l'expression de la phase sous la forme de $e^{j\pi}$. Dès lors, la phase totale passe de π à $\pi/2$.



(viii) Dessinez le diagramme de Nyquist de $H(s)G(s)$. Expliquez votre construction étape par étape. Indiquez des valeurs qui vous ont permis de dessiner le diagramme. Indiquez la direction lorsque ω croit.
total 2 = décomposition/procédure (0.5) + dessin final (0.5) + valeur algébrique (0.5) + w croit (0.5) On reprend les résultats obtenus pour le nyquist de H(s). La partie réelle et imaginaire de HG sont données par :

$$Re(\omega) = \frac{-0.5}{1+(\tau\omega)^2} \qquad Im(\omega) = \frac{0.5\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2}$$

Le diagramme de Nyquist est toujours une ellipse mais les points clés sont (-0.5, 0) en $\omega = 0$rad/s et (-0.25, 0.25) en $\omega = 1/\tau$. On tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.



(ix) La fonction de transfert $H(s)$ est mis en série avec un système $D(s)$ qui amène un délai de une seconde et ne modifie pas l'amplitude. Donnez la fonction de transfert $D(s)$. Dessinez le diagramme de Nyquist de $D(s)$. Expliquez votre construction étape par étape. Indiquez des valeurs qui vous ont permis de dessiner le diagramme. Indiquez la direction lorsque ω croit.

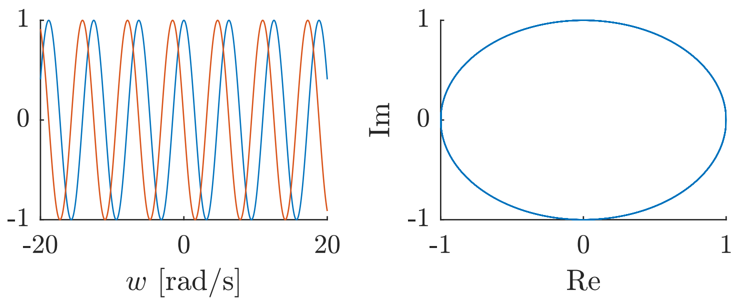
total : 3 = fonction de transfert 1 + nyquist explications (0.5) + dessin allure 0/5 (allure - ok si cest un cercle/oscillations) + 0.5 valeurs numériques + 0.5 sens de w Ajouter un délai dans un système amène une fonction de transfert sous la forme :

$$D(s) = e^{-t_0 s} \rightarrow D(j\omega) = e^{-j t_0 \omega}$$

La partie réelle et imaginaire sont données par :

$$Re(\omega) = \cos(t_0\omega) \qquad Im(\omega) = -\sin(t_0\omega)$$

On dessine donc simplement un cosinus de période 2π et un sinus d'amplitude -1 et de période 2π. Lorsque l'on combine la partie imaginaire en fonction de la partie réelle on obtient une ellipse entre -1 et 1 de hauteur comprise entre -1 et 1. On tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.



(x) Donnez l'allure du diagramme de Nyquist de la fonction de transfert $H(s)D(s)$ (le dessin peut etre approximatif tant qu'il explique la tendance). Indiquez la direction lorsque ω croit. Expliquez votre raisonnement (avec des équations ou des phrases comme vous préférez).

total : 1 = allure (0.5) + explication (0.5) On peut repartir des expressions analytiques :

$$H(s)D(s) = \frac{e^{-t_0 s}}{\tau s + 1}$$

qui peut se décomposer en partie réelle et imaginaire comme étant :

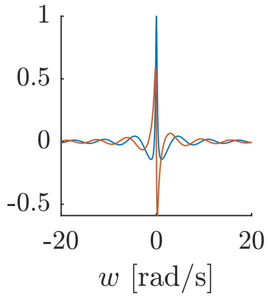
$$H(j\omega)D(j\omega) = Re(D).Re(H) - Im(D)Im(H) + j(Re(D).Im(H) + Im(D)Re(H))$$

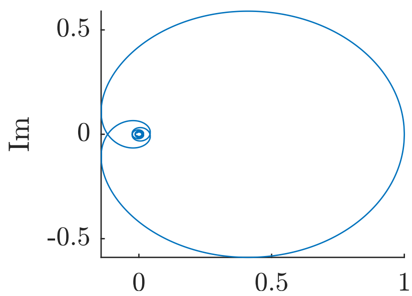
Si on veut le détailler :

$$\left[\frac{\cos(t_0\omega)}{1+(\tau\omega)^2} - \frac{\sin(t_0\omega)\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2}\right] - j\left[\frac{\tau\omega\cos(t_0\omega)}{1+(\tau\omega)^2} + \frac{\sin(t_0\omega)}{1+(\tau\omega)^2}\right]$$

Sans meme faire le calcul,on comprend qu'en $\omega = 0$rad/s, la partie réelle vaut 1 et la partie imaginaire vaut 0. Ensuite les courbes H sont simplement multipliées par les sinus et cosinus amenés par D. Dès lors,

quand ω croit, les parties réelles et imaginaires de H sont mulitipliées par des oscillations. Lorsque l'on combine tout, les parties réelle et imaginaire tendent vers 0 en oscillant.
Sur le diagramme de nyquist, on verra apparaitre une sorte de spirale autour de (0,0). On tourne également dans le sens des aiguilles d'une montre.





Question 3 (i) On considère le signal suivant : $x_1(t) = \cos(\omega_0 t - \pi/4)$. Donnez le spectre fréquentiel en amplitude et en phase de $x_1(t)$ avec la fréquence sur l'axe des abscisses. On appelle ce signal $X_1(f)$

total : 2 = amplitude, phase et détail math

On utilise la décomposition d'euler :

$$x_1(t) = 0.5e^{j\omega_0 t}e^{-j\pi/4} + 0.5e^{-j\omega_0 t}e^{j\pi/4}$$

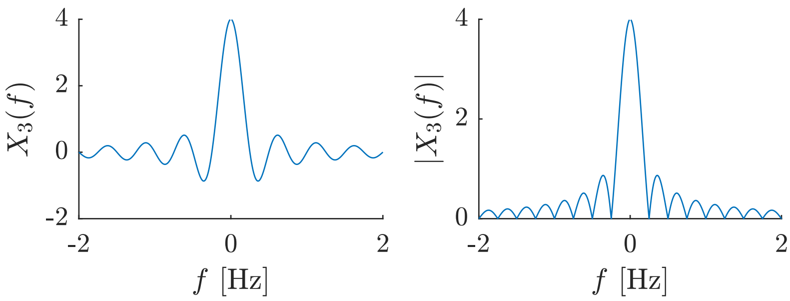
Spectre en amplitude : d'impulsions de dirac en $\pm f_0$ d'amplitude 1/2.

Spectre en phase : impulsions en $-f_0$ de $\pi/4$, et en f_0 de $-\pi/4$

(ii) On considère le signal $x_2(t)$ d'amplitude 1 compris entre $-T_1/2$ et $T_1/2$. Calculez la transformée de Fourier et dessinez $X_2(f)$ et l'amplitude de $X_2(f)$ pour $T_1 = 4$.

total : 2.5 = explication/math 1+ dessin/allure sinc (0.5) + dessin amplitude (0.5) + valeur algébrique correcte sur le graphe (0.5) En repartant de la définition, on obtient : $X_2(\omega) = \frac{2}{w}\sin(\frac{\omega T_1}{2}) = T\frac{\sin(\omega T_1/2)}{\omega T_1/2} = Tsinc(\frac{\omega T_1}{2})$ par définition : $\frac{\sin(x)}{x} = sinc(x)$.

En fréquence, on obtient : $X_2(f) = T\frac{\sin(\pi T_1 f)}{\pi T_1 f}$. La fonction s'annule pour toutes les valeurs $\pm k1/T_1$ avec k qui va de $-\infty$ à ∞ sauf 0.



(iii) Calculez le produit de convolution $X_1(f)$ et $X_2(f)$ qui donne le signal résultant $Y(f)$. Cette convolution est effectuée entre deux fonctions qui dépendent de la fréquence. Vous pouvez le résoudre par graphique ou analytiquement pour $\omega_0 = 2\pi$ [rad/s] (cad f_0=1Hz). Esquissez l'allure de $Y(f)$ en faisant attention aux données numériques : $f_0 = 1Hz$ et $T = 4$ qui doivent être visibles sur votre réponse.

total : 1.5 = explication + math + valeurs alg

Plusieurs méthodes étaient possibles :

- convolution graphique
- convolution analytique
- propriété/dualité convolution dans un domain = produit dans un autre domaine

– - convolution graphique : Les deux sinc viennent se placer à l'endroit des diracs

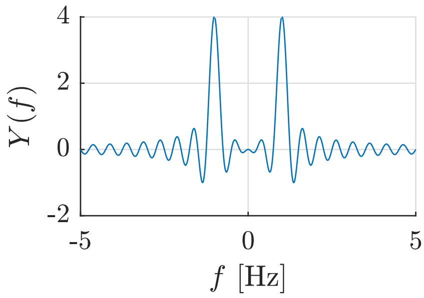
- convolution analytique : Avec $X_1(f) = 0.5e^{j-\pi/4}\delta(f - f_0) + 0.5e^{j\pi/4}\delta(f + f_0)$

Par définition d'un produit de convolution :

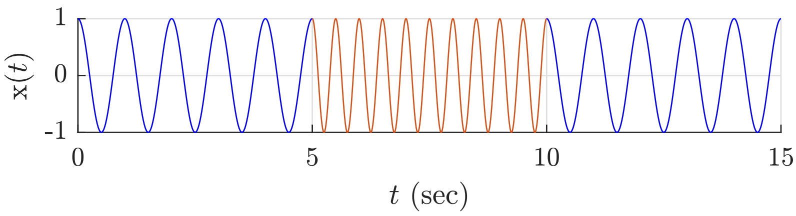
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f - \tau)X_2(\tau)d\tau$$

On a $X_1(f-\tau) = (...)\delta(f-\tau-f_0)+(...)\delta(f-\tau+f_0)$ qui n'est donc défini qu'en $\tau = f - f_0$ et $\tau = f + f_0$. Le terme $X_2(\tau)$ devient $X_2(f - f0) + X_2(f + f0)$. N'étant plus dépendant de τ, ces termes sortent de l'intégrale.

Le signal $X_2(f)$ est simplement déplacée en f_0 et en $-f_0$.



(iv) Question de théorie appliquée (max 1 page recto) :
Pour le devoir 2, il vous était demandé de construire un signal EEG. Une partie d'entre vous ont utilisé la modulation en fréquence ou bien vous avez dit que la fréquence variait légèrement (par exemple entre 1 et 3 Hz) de petits intervalles de temps à petits intervalles de temps. Cette technique peut être dessinée comme à la Figure ci-dessous.



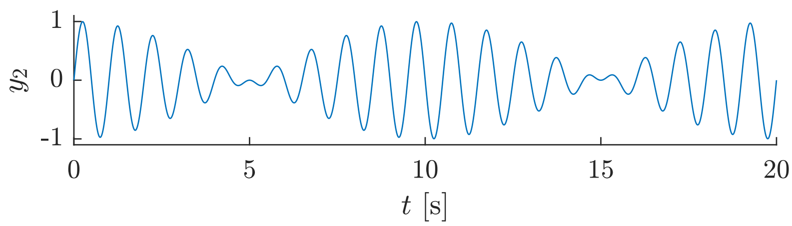
Cependant lorsque vous affichiez la transformée de Fourier, vous obteniez un contenu fréquentiel diffus au lieu des fréquences attendues entre 1 et 3Hz. Expliquez l'origine de ce phénomène. Pour cela, utilisez les réponses des questions ci-dessus si nécessaire ou bien des concepts du cours théoriques. L'explication doit être claire et bien expliquée en s'appuyant sur des formules ou des dessins. Comment faire pour avoir un contenu fréquentiel bien représentatif des différentes fréquences présentes ? Plusieurs idées peuvent être expliquées.
total : 1.5 = discussion par rapport au choix de la fenêtre et f_0, de l'addition des sinc, ...
Le choix de la fenêtre temporelle appelé T_1 dans les questions précédentes est trop petite par rapport aux fréquences considérés (aux alentours de f_0). Dès lors comme illustré à la figure de la convolution, les sinus cardinaux s'additionnent et rendent le contenu fréquentiel diffus. L'amplitude des sinus cardinaux est de T_1. Si ce paramètre diminue, le sinus cardinaux devient petit.
C'est exactement le contraire que l'on souhaite observer. Afin de bien distinguer chaque cosinus, on aimerait voir apparaitre une impulsion de dirac comme à la question 3.1. Pour cela il faut que la fenêtre soit très grande.

...

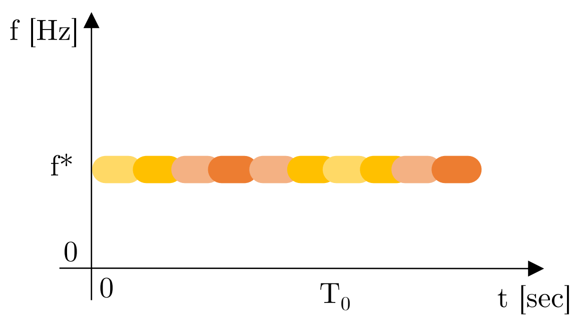
...

(v) Expliquez le concept de modulation en amplitude à l'aide d'un spectrogramme. total : spectrogramme 1 + explication 1 Le signal garde une meme fréquence $f*$ mais voit son amplitude varier au cours du temps selon une fonction sinusoidale de période T_0.

Figure du devoir

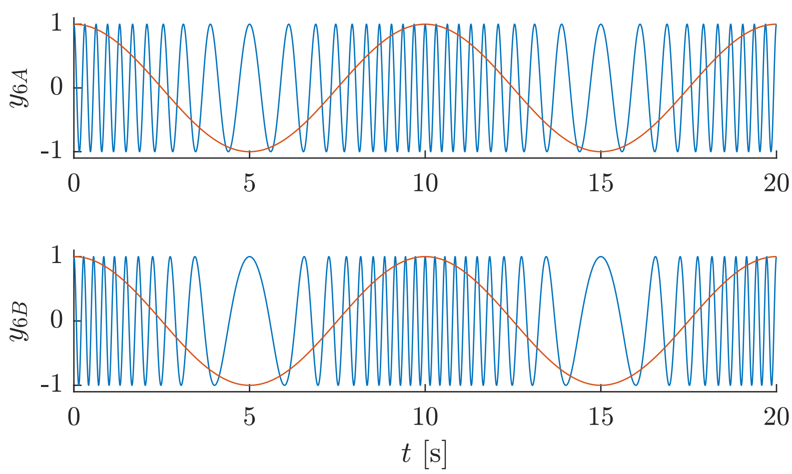


Le spectrogramme associé :

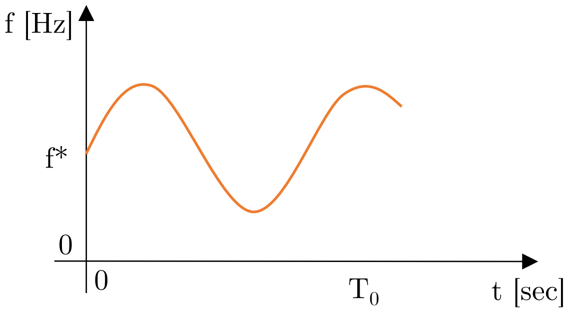


(vi) Expliquez le concept de modulation en fréquence à l'aide d'un spectrogramme. total : spectrogramme 1 + explication 1 Le signal garde une meme amplitude (meme couleur dans le spectrogramme) mais voit sa fréquence nominale f^* varier au cours du temps selon une fonction sinusoidale de période T_0.

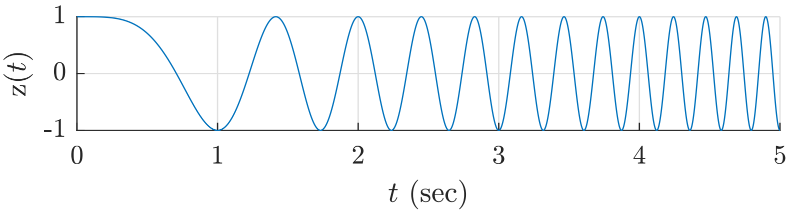
Figure du devoir



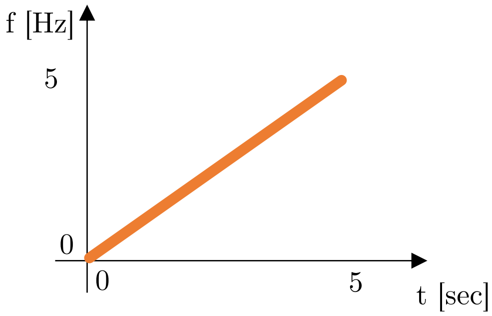
Le spectrogramme associé :



(vii) Dessinez le spectrogramme du signal $z(t)$ en expliquant votre raisonnement. Indiquez clairement vos abscisses et les labels de vos axes.



total : 1.5 = spectrogram (0.5) + valeurs (0.5) + explication 0.5 La fréquence augmente linéairement au cours du temps.



Annexes

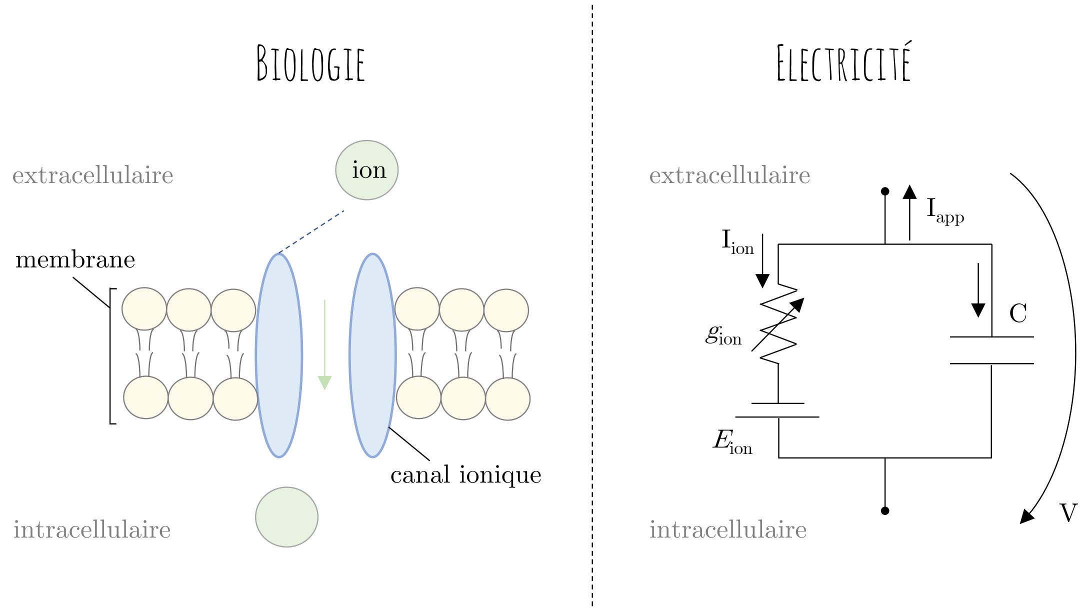


FIGURE 1 – Un neurone est une cellule excitable qui possède une membrane imperméable aux ions et des protéines appelées canaux ioniques qui laissent passer les ions de part et d'autre. On peut mesurer la tension membranaire V. La membrane peut être vue comme une capacité C qui génère un courant $C\dot{V}$. Les canaux ioniques sont des conductances g_{ion} (inverse d'une résistance). On associe une batterie en fonction du type d'ions qui traversent la membrane E_{ion}. On obtient un courant ionique I_{ion}. La cellule peut également recevoir un entrée un courant appliqué I_{app}.

Pour rappel :
$z = a + jb = |z|e^{j\theta}$, $a = |z|\cos(\theta)$, $b = |z|\sin(\theta)$
a est la partie réelle de z, b est la partie imaginaire de z, $|z|$ est le module (aussi appelé amplitude) de z et θ est son argument (aussi appelé la phase).

Données numériques :
$20\log(2) = 6$ [dB] ; $20\log(3) = 9.5$ [dB] ; $20\log(4) = 12$ [dB]

Ci-dessous, vous trouverez le graphique de la fonction $\frac{x}{1+x^2}$ et $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ (elle s'annule aux chiffres entiers tels que -3, -2, -1, 1, 2,3, ...