SYST0002 – Introduction aux signaux et systèmes

Examen

6 janvier 2022

Consignes

- Durée : 3h30.
- Une nouvelle feuille pour chacune des 3 questions.
- Indiquez votre nom, prénom et matricule sur chaque feuille.
- Appareils électroniques (calculatrice, GSM, etc.) non admis.

Justifiez toujours vos réponses.

Question 1 On considère le modèle dynamique suivant avec μ comme paramètre réel :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3\\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$

(i) Le système d'équations est-il linéaire ? Si non, identifiez <u>toutes</u> les non-linéarités. [0.5 point] (rép+justification)
non linéaire, x^3

(ii) Calculez le(s) point(s) fixe(s). Discutez en fonction du paramètre μ si nécessaire. [2points] (0.5/PF + 0.5 CE)
• pour toutes les valeurs de μ, PF1(0,0).
• si μ est négatif, uniquement le PF1.
• si μ est positif (positif ou nul), on obtient deux autres points fixes $(\pm\sqrt{\mu},0)$

(iii) Calculez la nature du(des) point(s) fixe(s) (noeud stable/instable, spirale stable/instable, point de selle, etc.). Discutez en fonction du paramètre μ si nécessaire. [3.5 points] (0.5 jacobien + 1 pour la discussion et nature du PF1 +1 discussion et nature PF2+1 PF3)
Le jacobien est égal à

$$A = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

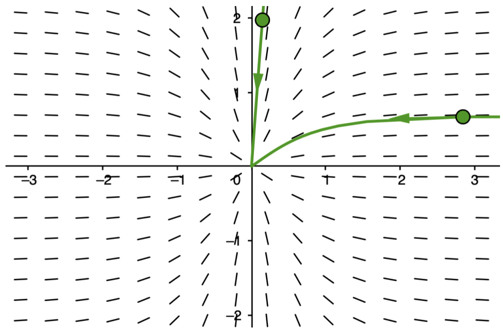
• stabilité du PF1 (0,0) : Les VaP sont égales à μ et-1. Il faut discuter la stabilité en fonction de μ :
  - si $\mu < 0$: les deux VaP sont négatives et réelles. Il s'agit d'un point stable.
  - si $\mu = 0$: une VaP est nulle et l'autre est négative et réelle. Il s'agit d'un point stable.
  - si $\mu > 0$: Les deux VaP sont réelles et de signes contraires. Il s'agit d'un point de selle.

• stabilité du PF2 $(\mu, 0)$ qui existe si $\mu > 0$: Les VaP sont égales à -2μ et-1. Avec la condition d'existence du PF2, les deux VaP sont réelles et négatives, le PF2 est un point stable.
• stabilité du PF3 $(-\mu, 0)$ qui existe si $\mu > 0$: Les VaP sont égales à -2μ et-1. Avec la condition d'existence du PF3, les deux VaP sont réelles et

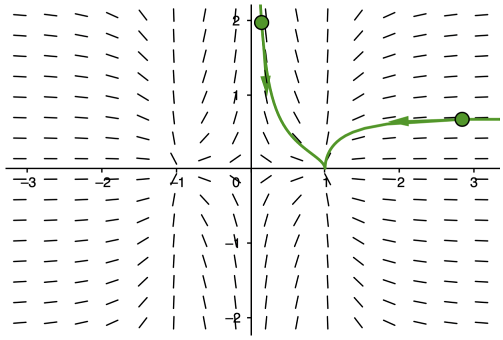
négatives, le PF3 est un point stable.

(iv) Donnez l'équation des nullclines. [1 point] (0.5 / nullcline)
x-nullcline : $x = 0$ et si $\mu > 0$ $x = \pm\sqrt{\mu}$. Les x-nullclines sont des droites verticales. y-nullcline : $y = 0$: il s'agit de l'axe des abscisses.

(v) Dessinez le(s) plan(s) de phase complet de votre système. Tracez autant de plans de phase que de situations possibles lors de votre discussion paramétrique. Indiquez le(s) point(s) fixe(s), leur stabilité, tracez les nullclines, dessinez le champ de vecteurs. Tracez suffisamment de vecteurs pour avoir une bonne idée de la dynamique de votre système ; au minimum un vecteur dans les différents quadrants délimités par les nullclines. Expliquez comment vous trouvez ces vecteurs et montrez vos calculs pour les obtenir. [6 points]
obtenu via Geogebra pour $\mu \leq 0$



obtenu via Geogebra pour $\mu > 0$



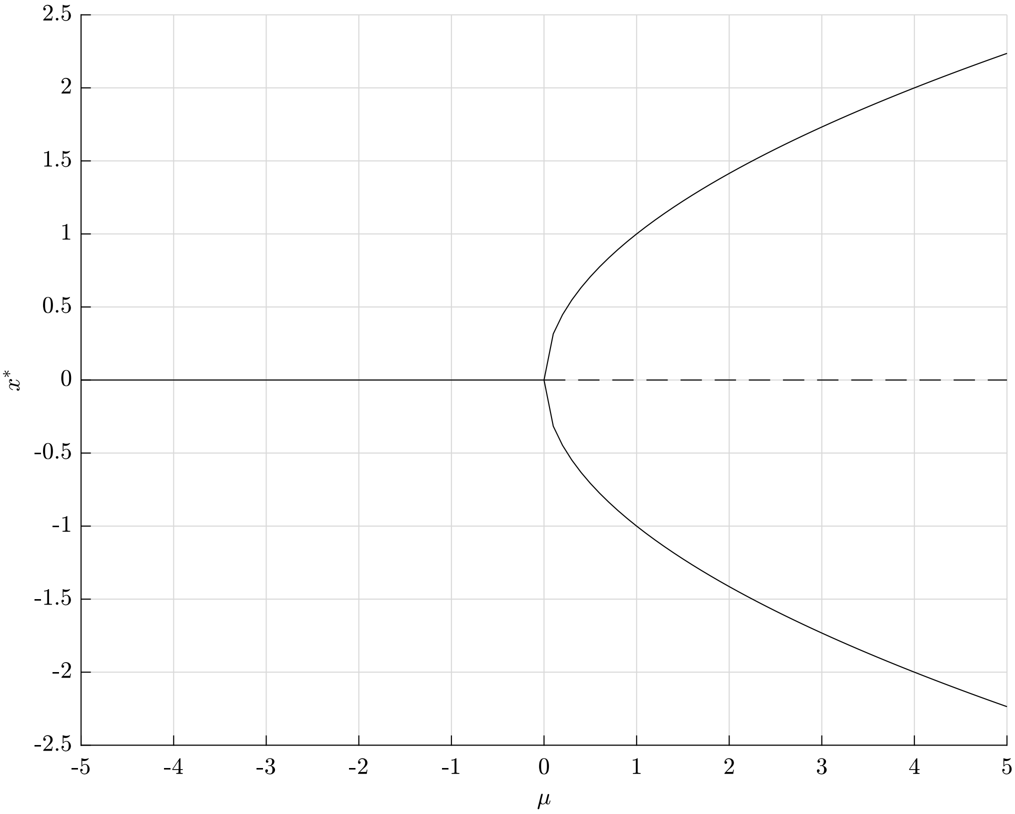
(vi) Comment le système évolue-t-il si on démarre au point $(x_0, y_0) = (0.5, 2)$ dans le plan de phase (ou les différents plans de phase en fonction du paramètre μ) ? Pour cela, tracez qualitativement la trajectoire correspondante dans le plan de phase.
[1.5 points] il y a trois configurations possibles :
- $\sqrt{\mu} < 0$: la trajectoire converge vers (0,0)
- $\sqrt{\mu} > 0 et < 1/2$: la trajectoire converge vers ($\sqrt{1/2}$,0) en venant de la gauche
$\sqrt{\mu} < 0$: la trajectoire converge vers ($\sqrt{1/2}$,0) en venant de la droite

(vii) Quel est l'effet de la modification $\dot{y} = 2 - y$ sur la dynamique du système ? Expliquez en quelques phrases sans refaire l'étude complète du plan de phase. [1 point] shift+nature

Les points fixes sont shiftés de deux unités vers le haut. Les ordonnées passent de 0 à 2. Leurs natures ne sont pas modifiés.

(viii) Dessinez un graphique x^* (l'abscisse de votre(vos) point(s) fixe(s)) en fonction de μ. Indiquez la nature du(des) point(s) fixe(s) d'abscisse x^* dans les différentes régions obtenues lors de votre discussion paramétrique. Vous pouvez utiliser une légende claire et expliquez brièvement la construction de ce graphique. [2 points] explication (0.5), mu<0 (0.5), mu>0 (1) avec légende clair sur la nature

L'abscisse du PF vaut 0 pour μ négatif et nul. Ensuite, pour μ positif, il y a trois points fixes, l'abscisse nul est un PF instable et les deux autres abscisses caractérisant les PF stables sont égales à $\pm\sqrt{\mu}$. Légende : les points fixes stables sont tracés par un trait plein, les points instables par un trait discontinu.



(ix) En fonction du résultat de la question 1.iii :

- Si vous avez obtenu un point fixe du type "noeud", comment faut-il modifier le système pour avoir un point fixe du type "spirale" ?
  [1.5 points]
  Il faut modifier le Jacobien pour obtenir une forme donnant un déterminant qui pourrait être négatif et ainsi obtenir des VaP imaginaires.
  Par exemple le système modifié serait :

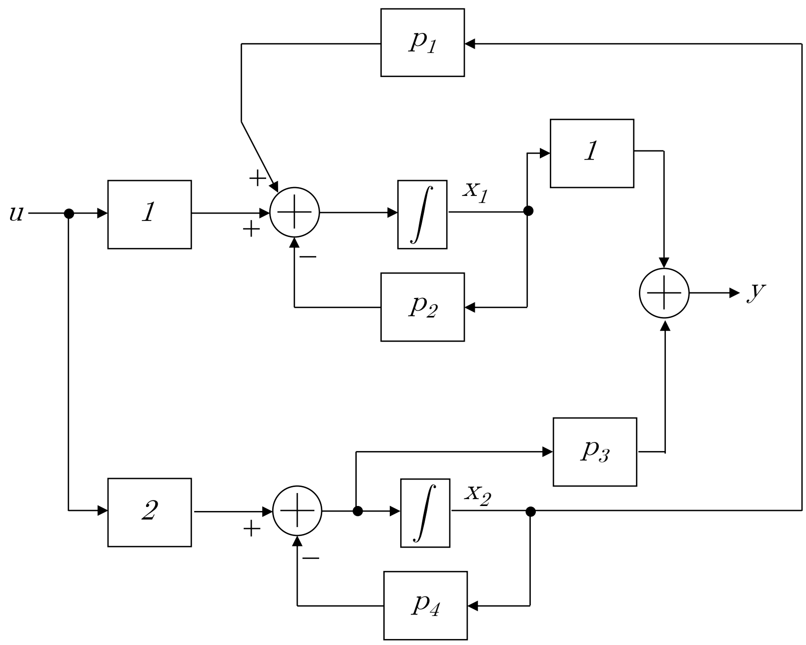
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \mu x - x^3 + y \\
\dot{y} &= -y
\end{aligned}
$$

  Le Jacobien pour le PF (0,0) devient pour l

$$
A = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

  Ce qui amène une discussion paramétrique sur le déterminant et qui permet d'avoir des VaP complexes conjuguées.
- Si vous avez obtenu un point fixe du type "spirale", comment faut-il modifier le système pour avoir un point fixe du type "noeud" ?

Question 2 On considère le bloc diagramme suivant où p_1, p_2, p_3 et p_4 sont des para-



mètres réels.

(i) Donnez la représentation d'état du système (les matrices A,B,C,D) [3.5 points] (1.5 calcul + 2 réponse matrices)

$$A = \begin{pmatrix} -p_2 & p_1 \\ 0 & -p_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -p_3 p_4 \end{pmatrix}, D = 2p_3$$

(ii) Choisissez la bonne phrase et justifiez à l'aide de calcul lorsque $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 1, p_4 = 1$.

- La réponse du système converge de manière oscillatoire.
- La réponse du système converge de manière monotone.
- La réponse du système diverge de manière oscillatoire.
- La réponse du système diverge de manière monotone.

[1.5 points] (1 calcul + 0.5 réponse)

Il suffit d'étudier les VaP depuis la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

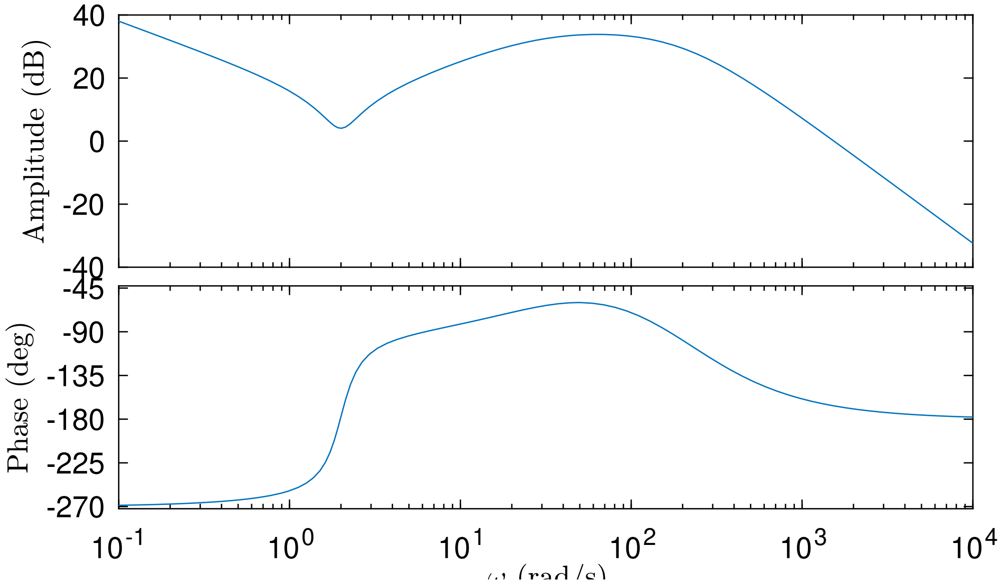
Les VaP sont égales à -1 et -2. Elles sont toutes les deux réelles négatives. La réponse du système converge de manière monotone.

(iii) On donne la fonction de transfert suivante :

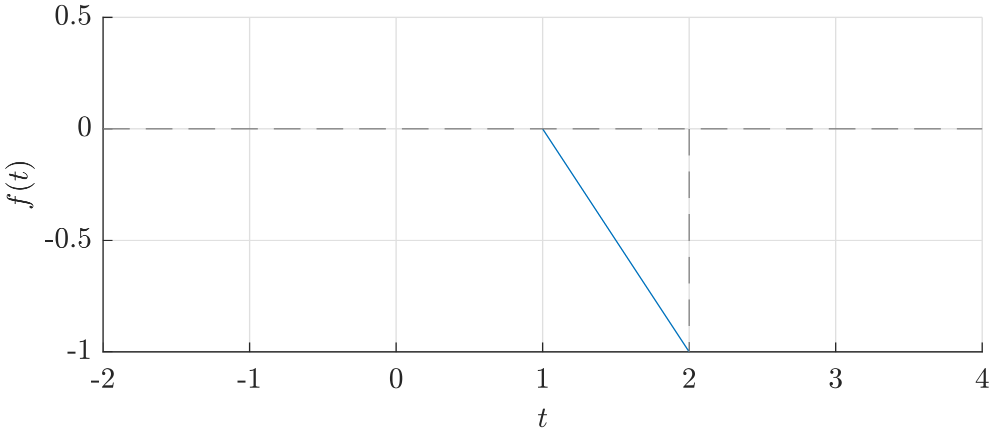
$$H(s) = \frac{60(s^2 + 0.8s + 4)}{s(s-30)(\frac{s}{200} + 1)^2}$$

Dessinez le Bode diagramme de H(s). L'amplitude est dessinée en dB selon une graduation linéaire et la phase en degré ou en radian selon une graduation linéaire. L'abscisse correspond à la pulsation en graduation logarithmique.
Grâce au diagramme de Bode, donnez l'amplitude en $\omega = 2$ [rad/s] et la phase lorsque ω tend vers l'infini.

L'amplitude en $\omega = 2$ est égale à 4dB et la phase est égale à ±180ř lorsque ω tend vers l'∞. en fonction de la convention utilisée +180 ou -180 est accepté



(iv) On donne un signal $f(t)$ dessiné en trait plein ci dessous :



et $g(t) = e^{-t}$ défini entre $[1; +\infty[$ sinon $g(t) = 0$.

On souhaite démarrer le calcul du produit de convolution $y(t) = f(t) * g(t)$ de manière graphique.

• Donnez les différents intervalles de t sur lesquels le calcul de la convolution va se décomposer.
• Écrivez l'intégrale à effectuer sur chaque intervalle de t en indiquant clairement les bornes et l'expression des signaux f et g considérées sur chaque intervalle. Il n'est pas demandé de résoudre l'intégrale mais simplement de mettre en équation. avec les données disponibles.
[4 points] $t < 2 \; : y(t) = 0$
$t \in [2; 3[\; : y(t) = \int_1^{t-1} (-\tau + 1) e^{-(t-\tau)} d\tau$
$t > 3 : \; y(t) = \int_1^2 (-\tau + 1) e^{-(t-\tau)} d\tau$

Question 3 (i) On donne le signal suivant :

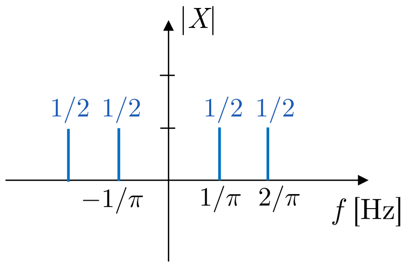
$$x(t) = \cos(2t + \pi/4) + \sin(4t - \pi/8)$$

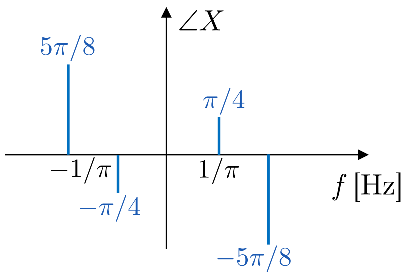
Donnez le spectre fréquentiel en amplitude et en phase du signal. L'axe des abscisses est exprimé en fréquence [Hz]. Expliquez vos calculs.

Il suffit de transformer le cosinus et le sinus en exponentielle imaginaire :

$$\frac{1}{2}e^{j2t}e^{j\pi/4} + \frac{1}{2}e^{-j2t}e^{-j\pi/4}$$
$$+\frac{1}{2}e^{j4t}e^{-j5\pi/8} + \frac{1}{2}e^{-j4t}e^{j5\pi/8}$$

La fréquence est égale à $1/\pi$. La somme est composée successivement des coefficients $k = 1, k = -1, k = 2, k = -2$.





(ii) On étudie un système masse-ressort. Un capteur nous donne la position de l'objet au cours du temps. Le capteur étant imparfait, il divise l'amplitude du signal par 2 et amène un délai de 200 [ms]. Donnez la fonction de transfert modélisant le capteur. Dessinez le diagramme de Bode en amplitude et en phase. Justifiez votre dessin. Que vaut l'amplitude et la phase en $\omega = 100$ [rad/s] ?

$F(s) = 0.5e^{-t_0 s}$ avec $t_0 = 0.2$. L'amplitude est constante et égale à 1/2 [-] ou 20log(1/2) [dB]. La phase est une droite décroissante dont la pente est égale à 0.2 lorsque l'axe des abscisses est gradué selon une échelle linéaire.

$|F(100)| = 1/2$ [-] ou 20log(1/2) [dB]

$\angle F(100) = -t_0 w = -0.2 * 100 = -20$ [rad]

(iii) Démontrez pourquoi la région de convergence d'un système causal est un plan délimité à gauche par le plus grand pôle de la fonction de transfert (max 1 page).

Fascicule page 73 :

- la réponse impulsionnelle d'un système causal est sous la forme $h(t)$

existe pour $t > 0$.

- la forme classique de $h(t)$ est une somme d'expontielle du type $e^{\lambda_i t} I(t)$.
- la somme est bornée par la plus grande exponentielle $\lambda*$. - dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert est donc une somme de fraction simple du type $\frac{1}{s-\lambda_i}$. Le pôle le plus grand est $\lambda*$.
- Pour que la transfert de Laplace de la réponse impulsionnelle (ie, la fonction de transfert) existe, il faut que l'intégrale : $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$ existe.
- Avec $h(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} I(t)$, la condition d'existence de la transformée de Laplace devient : $\int_0^{\infty} |e^{\lambda_i t} e^{-st}| dt < \infty$. La région de convergence est donnée par : $\sigma > \lambda_i$.
- Conclusion : la région de convergence d'un système causal est donnée par le demi plan fermé à gauche par le pôle le plus grand de la fonction de transfert (qui correspond à la plus grande exponentielle de la réponse impulsionnelle).

(iv) Pour les propositions suivantes, répondez par VRAI ou FAUX et **justifiez** (pas de point sans justification).

a) Le système défini par l'équation $\ddot{y} + 5\cos(2t)\dot{y} + 3 = \dot{u}$ est linéaire.
Vrai, tous les termes sont linéaires.

b) $(u = \cos(2\pi t), y = 5\cos(2\pi t + \pi/4))$ est une paire entrée-sortie valide pour un système LTI stable.
Vrai, fréquence conservée, changement d'amplitude et déphasage.

c) Un système de second ordre de facteur d'amortissement $\zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ peut avoir une réponse impulsionnelle non monotone.
Vrai, la réponse est non monotone si $1 > \zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Un système causal peut avoir une fonction de transfert possèdant plus de zéros que de pôles.
Faux.

e) Tout signal admet une représentation en séries de Fourier.
Faux, uniquement les signaux périodiques.

f) Un signal périodique dans le domaine temporel est à valeurs discrètes dans le domaine fréquentiel et inversement.
Vrai. Discrétiser dans un domaine revient à "périodiser" dans l'autre domaine.

g) Un système LTI soumis à une entrée oscillatoire peut avoir une sortie non-nulle non-oscillatoire.
Faux. Réponse oscillatoire à la même fréquence que l'entrée.