SYST0002 – Introduction aux signaux et systèmes

Examen

24 aout 2023

Consignes

- Durée : 4h00.
- Une nouvelle feuille pour chacune des 4 questions.
- Indiquez votre nom, prénom et matricule sur chaque feuille.
- Appareils électroniques (calculatrice, GSM, etc.) non admis.

Justifiez toujours vos réponses.

Question 1 On considère le modèle dynamique suivant avec les deux variables x et y.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \cos x \end{aligned}$$

(i) Le système d'équations est-il linéaire ? Si non, identifiez toutes les non-linéarités.

1 point

non linéaire, $\cos(x)$

(ii) Expliquez le concept du plan de phase et pourquoi il est intéressant de travailler avec cette représentation. Définissez les notions de nullclines et de champ de vecteurs.

2 points : plan de phase (0.5), nullcline (0.5), champ de vecteur (0.5), pourquoi (0.5)

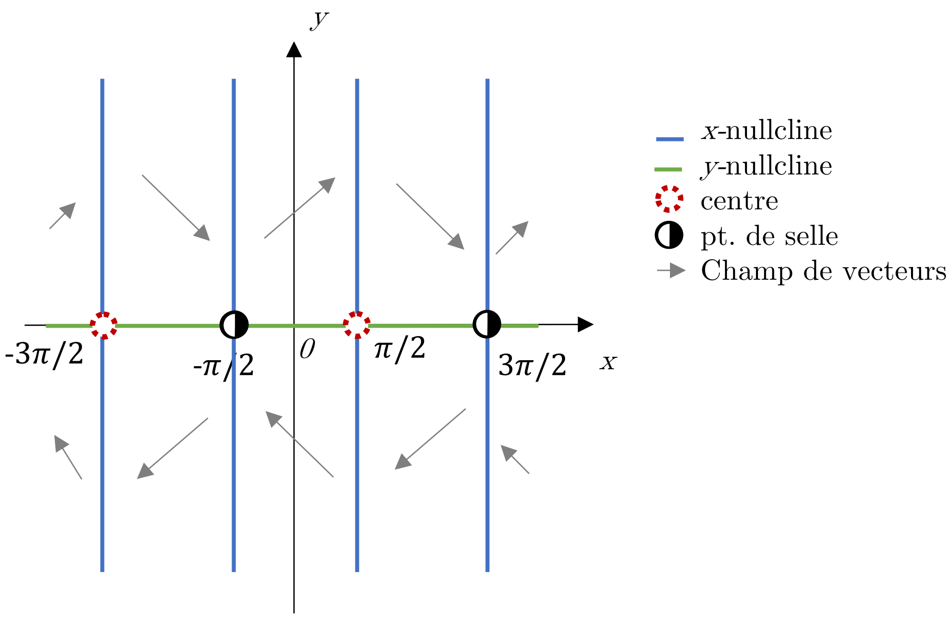
Lorsque l'on étudie un système à 2D, on peut soit essayer de résoudre les équations - ce qui n'est toujours possible, soit on peut étudier la dynamique. Il suffit de dessiner un graphique avec l'axe des abscisses associé à la première variable et l'axe des y associé à la deuxième variable. On dessine les nullclines qui représente tous les endroits du plan ou la vitesse est nulle selon une direction ; x-nullcline (resp. y-nullcline) est le lieu géométrique sur lequel la vitesse horizontale (resp. verticale) est nulle. Le champ de vecteurs permet de donner une indication de la direction et de l'amplitude de la vitesse du point en une position (x,y) dans le plan. Après avoir dessiné le plan de phase avec les nullclines et le champ de vecteurs, on peut connaitre la dynamique du système. Sans devoir résoudre le système, on peut avoir une indication claire de la trajectoire.

(iii) Dessinez le plan de phase du système en calculant et dessinant clairement les nullclines. Dessinez également le champ de vecteurs en indiquant explicitement vos calculs.

4-6 points : position des PF, position des nullclines, champs de vecteurs, calcul/raisonnement

(iv) Déduisez et discutez la nature et la stabilité de vos points fixes (noeuds

x	y	$\dot{x}$	$\dot{y}$	vecteur résultant
0	1	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$
0	-1	$\leftarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$
π	1	$\rightarrow$	$\downarrow$	$\searrow$
π	-1	$\leftarrow$	$\downarrow$	$\swarrow$



stable/instable, spirale stable/instable, point de selle, etc....).

2 points : calcul + nature

Les points en $k\pi/2$ avec $k \in \{-1,3\}$ sont des points de selles car on voit clairement une partie d'une champ de vecteurs être attirés par le point et l'autre partie s'éloigne du point fixe. Les points en $k\pi/2$ avec $k \in \{-3,1\}$ sont des centres car on voit le champs de vecteurs être circulaire.

(v) Calculez analytiquement les points fixes ainsi que leur type (noeuds stable/instable, spirale stable/instable, point de selle, etc.).

3 points : calcul + identification + réponse

Les points fixes sont donnés par PF $(k\pi/2, 0)$ pour $k \in \{-\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$.
Le jacobien est égal à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(x) & 0 \end{pmatrix}$$

stabilité du PF pour $k \in \{-3,1\}$: calcul de VaP : $\pm i \rightarrow$ centre
stabilité du PF pour $k \in \{-1,3\}$: calcul de VaP : $\pm 1 \rightarrow$ point de selle

(vi) Que se passe-t'il si le système devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y \\ \dot{y} &= \cos x \end{aligned}$$

Sans tout recalculer, expliquez l'effet du changement sur la dynamique du système.

1 point : sens + amplitude

La présence du -1 pour la première équation du système impact la vitesse horizontale du champ de vecteur. Toutes les flèches vont pointer dans l'autre direction selon l'horizontale. Les points fixes 'centres' présentaient un flux oscillant selon une rotation sens horloge. Avec la présence du -1, le sens devient trigonométrique. Le chiffre multiplicatif 2 double la vitesse horizontale. Les points fixes ne changent pas de place et leur nature reste la même.

Question 2 On considère un circuit électrique composé d'une résistance R et d'un condensateur C mis en série. L'équation entrée-sortie caractérisant le circuit est donnée par :

$$RC\dot{y} + y = u$$

(i) Calculez la fonction de transfert du système.

2 points : calcul+réponse

On travaille dans le domaine de Lapace :

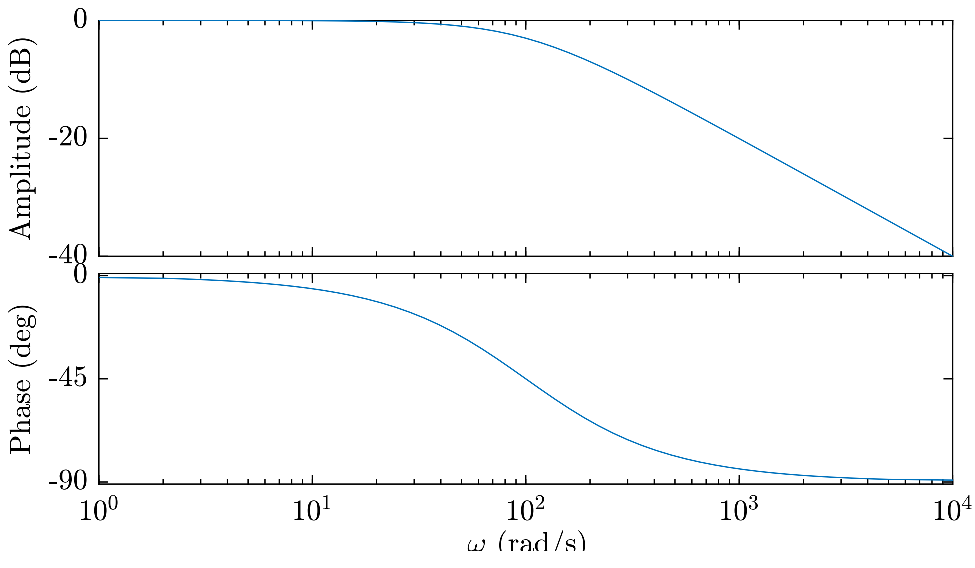
$$RCsY + Y = U$$

La fonction de transfert H est donnée par :

$$H = \frac{Y}{U} = \frac{1}{RCs + 1}$$

(ii) Dessinez le diagramme de Bode en amplitude et en phase en expliquant vos calculs avec $RC = 0.01$. Utilisez une graduation logarithmique pour l'axe des abscisses. L'amplitude est donnée en dB et la phase en degrés. Tracez les axes et légendes clairement. Indiquez le *gain statique* et des valeurs clés sur l'axe des abscisses et ordonnées (pente, changement de profil dans le graphique, ...). 4 points :3 points dessin+1 point gain statique.

On peut décomposer l'expression en amplitude et phase ou bien repartir des formes canoniques de sysètme de premier ordre : La gain statique est de 0dB.

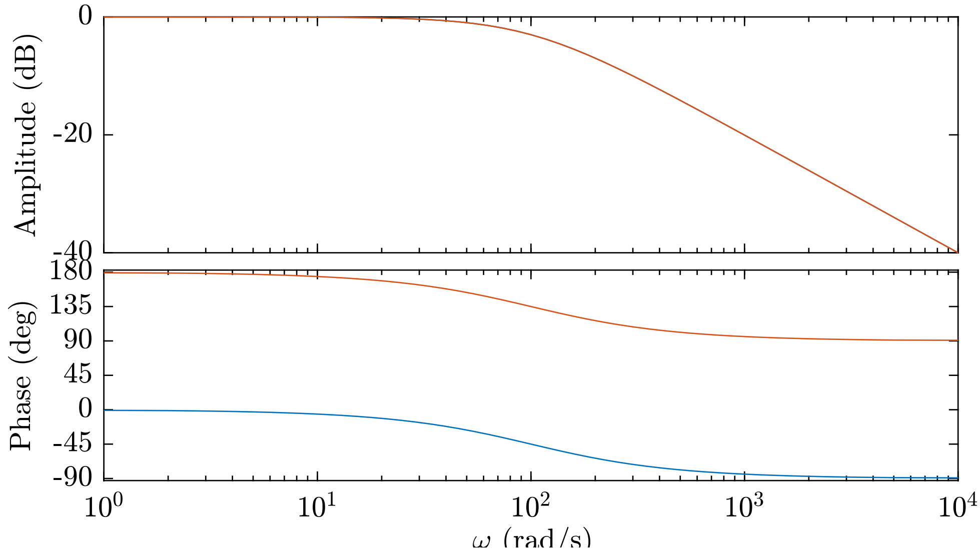


(iii) Le circuit RC est mis en série avec un système dont la fonction de transfert est $M(s) = -1$. Que devient la fonction de transfert du système total ? Modifiez le diagramme de base de la question précédente pour mettre en avant l'impact de la mise en série du système initial avec M et expliquez votre raisonnement.

2 points : justification + dessin

Le nouveau système en série amène un déphasage de 180 degrés (ou

-180, c'est pareil).



(iv) Calculez la réponse forcée du système pour une entrée $u(t) = \mathbb{1}(t)$ et des conditions initiales sont nulles.

3 : 2 points calcul+ 1réponse finale

L'entrée $u(t)$ s'écrit $U(s) = \frac{1}{s}$. La réponse forcée est donnée par :

$$Y(s) = H(s).U(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{RCs+1}$$

Il suffit de décomposer en fractions simples :

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-RC}{RCs+1}$$

On calcule la transformée inverse :

$$y(t) = \mathbb{1}(t)(1 - e^{-t/RC})$$

(v) Calculez la réponse impulsionnelle du système initial (associée à l'équation entrée-sortie de l'énoncé) en justifiant votre calcul.

2 points : calcul + justification

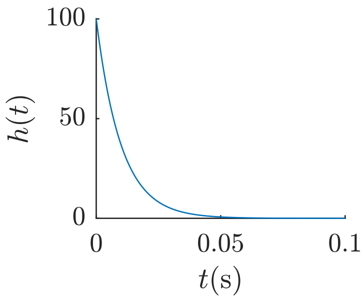
En partant de la fonction de transfert, on peut utiliser les propriétés du domaine de Laplace (linéarité et décalage fréquentiel).

$$h(t) = \frac{\mathbb{1}(t)}{RC}e^{-t/RC}$$

(vi) Esquissez la réponse impulsionnelle en indiquant une graduation claire et précise des axes. 1 point : allure 0.5 + valeur 0.5

(vii) Expliquez le lien entre fonction de transfert et réponse impulsionnelle d'un système.

1 point



La fonction de transfert $H(s)$ est la transformée de Laplace de la réponse impulsionne du système $h(t)$.

(viii) Calculez la convolution entre la réponse impulsionnelle et l'entrée $u(t) = \mathbb{I}(t)$.

2 points

en $t < 0$, les deux fonctions ne se recouvrent pas : $y(t) = 0$.

en $t >= 0$,

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-t/RC} d\tau = 1 - e^{-t/RC}$$

La réponse totale est donnée par :

$$y(t) = \mathbb{I}(t)(1 - e^{-t/RC})$$

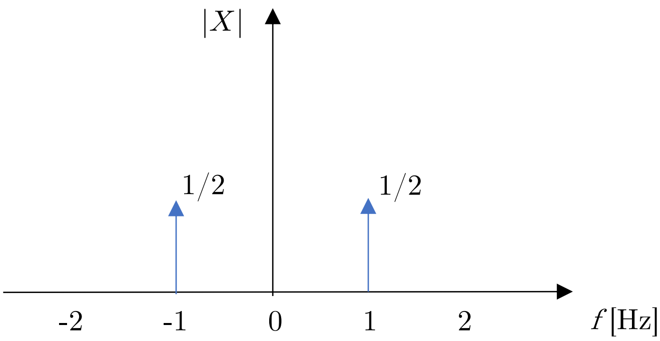
Question 3 (i) On considère le signal suivant $x(t) = \cos(2\pi t)$. Tracez le spectre fréquentiel (en représentant clairement les fréquences) en amplitude et en phase en expliquant votre raisonnement avec des calculs.

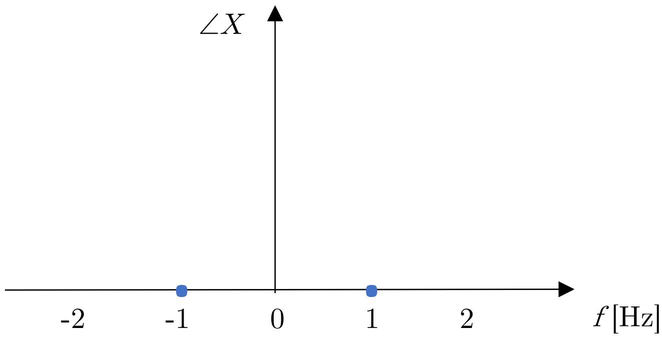
2 points : calcul 1+ dessin 1 (0.5 amplitude, 0.5 phase)

On peut utiliser la formule d'Euler pour décomposer le signal :

$$\cos(t) = 0.5e^{j2\pi t} + 0.5e^{-j2\pi t}$$

On peut identifier les coefficients de la série de Fourier :
en $f = 1\text{Hz}$: $|X(1)| = 1/2$ et $\angle X(1) = 0$.
en $f = -1\text{Hz}$: $|X(-1)| = 1/2$ et $\angle X(-1) = 0$.



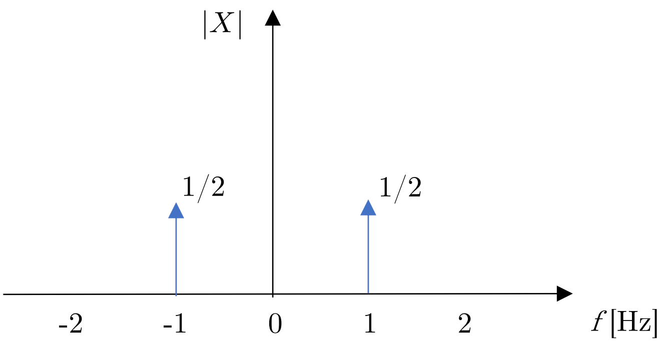


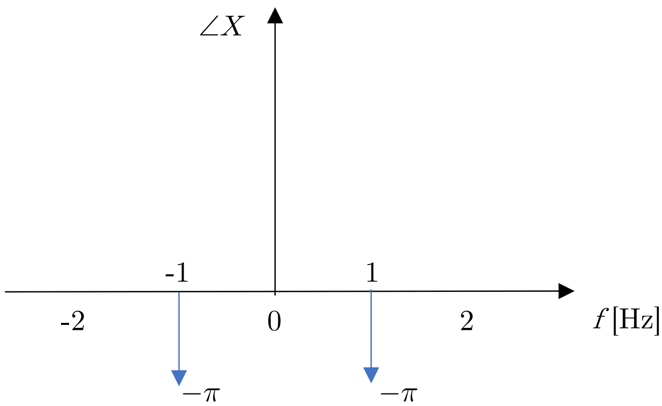
(ii) Le signal devient $x(t) = -\cos(t)$. Que devient le spectre fréquentiel en amplitude et en phase ? Expliquez votre raisonnement.

2 points : calcul + dessin

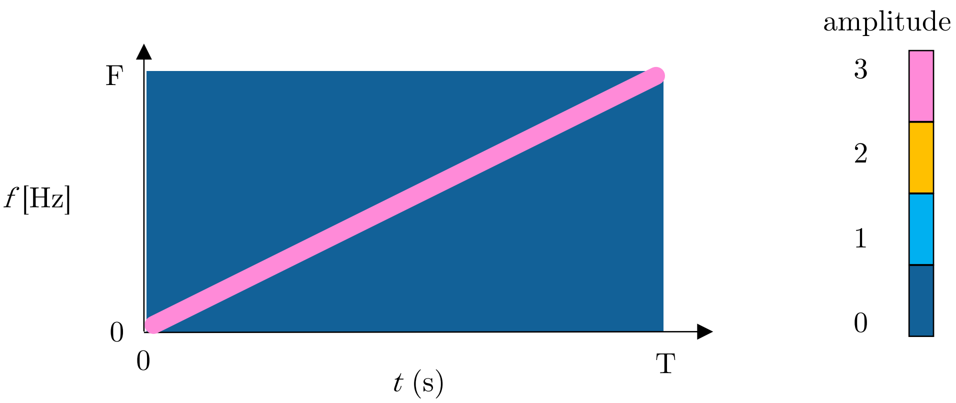
Multiplier le signal par -1 amène un déphasage de 180 degrés. En effet, -1 = $e^{-j\pi} = e^{j\pi}$. Le spectre en amplitude est inchangé.

$$x(t) = -\cos(t) = 0.5e^{-j\pi}e^{j2\pi t} + 0.5e^{-j\pi}e^{-j2\pi t}$$



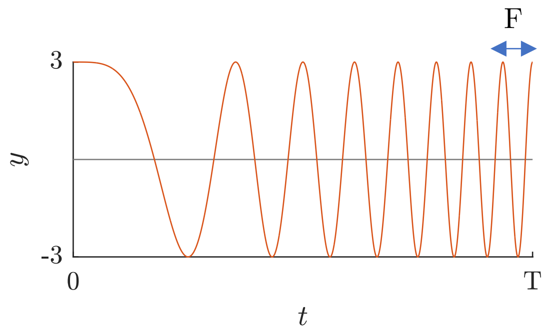


(iii) Un signal $y(t)$ est décrit par son spectogramme.

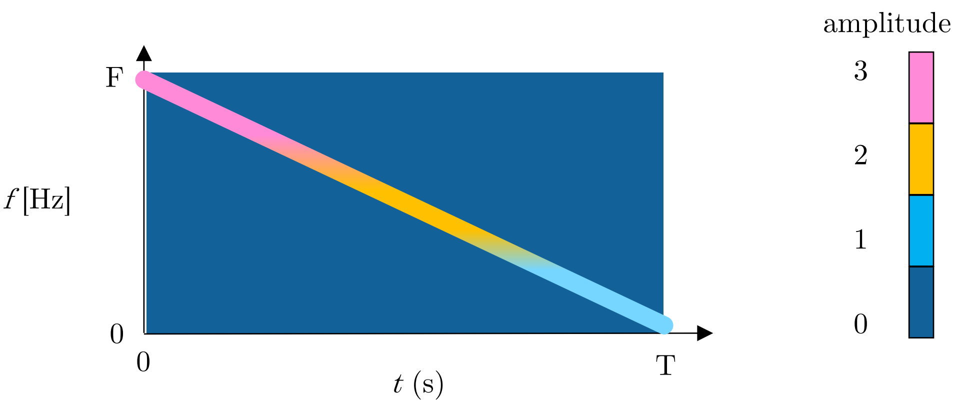


Pour rappel, un spectogramme décrit l'évolution du contenu fréquentiel au cours du temps. L'amplitude est également indiquée par la couleur. Dessinez le signal temporel $y(t)$ associé à ce spectrogramme. Indiquez les valeurs clés (F, T, amplitude) sur le graphique.

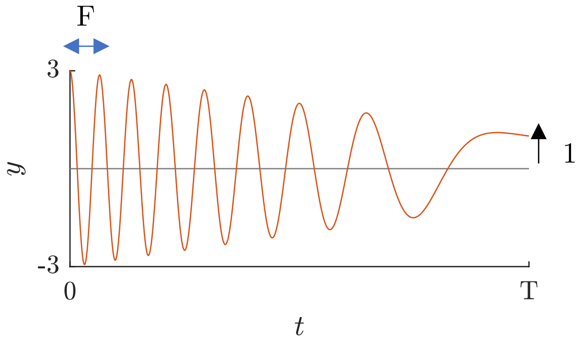
2 points : 1 allure+1 valeur



(iv) Le signal subit une perturbation et son spectrogramme est modifié comme à la figure suivante. Dessinez le signal temporel. Indiquez les valeurs clés sur le graphique (F, T, amplitude).



2 points : 1 allure+1 valeur



(v) BONUS : Imaginons que le signal précédent représente un son. Décrivez précisément le son associé au dernier spectrogramme.

1 point

le son est fort et aigu et s'atténue en amplitude linéairement pour devenir plus grave

Question 4 Pour les propositions suivantes, répondez par VRAI ou FAUX et justifiez. Il n'y a pas de point accordé sans justification.

(i) Le système $\dot{y} = cos(t).y + 3u$ est non linéaire.

(ii) Le système $\dot{y} = cos(t).y + 3u$ est temps-variant.

(iii) Un point d'équilibre associé à au moins une valeur propre à partie réelle positive peut transitoirement attirer les trajectoires.

(iv) La réponse impulsionnelle d'un système causal est nulle en t > 0.

(v) Le domaine de la transformée de Fourier d'un signal périodique est discret.

(vi) On peut représenter la réponse fréquentielle d'un système LTI causal instable sur des diagrammes de Bode.

Annexes

Propriétés des transformées de Laplace :
R est la ROC initiale (avant transformation) et après la virgule, on note la ROC associée au signal transformé.

Décalage temporel/fréquentiel

$$
\begin{aligned}
t \mapsto x(t-t_0) &\stackrel{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} s \mapsto e^{-st_0}X(s) \quad , \ R \\
t \mapsto e^{s_0 t}x(t) &\stackrel{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} s \mapsto X(s-s_0) \quad , \ R - \ R(s_0) \\
t \mapsto e^{j\omega t}x(t) &\stackrel{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} s \mapsto X(s-j\omega) \ , \ R
\end{aligned}
$$

Dualité multiplication/convolution

$$t \mapsto y(t) = (x_1 * x_2)(t) \stackrel{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} s \mapsto Y(s) = X_1(s)X_2(s)$$

Transformée de Laplace de fonction élémentaire

$$x(t) = \mathbb{1}(t) \mapsto X(s) = \frac{1}{s}, \text{ avec } \sigma > 0$$