SYST0002 – Introduction aux signaux et systèmes

Examen

19 aout 2022

Consignes

- Durée : 4h00.
- Une nouvelle feuille pour chacune des 4 questions.
- Indiquez votre nom, prénom et matricule sur chaque feuille.
- Appareils électroniques (calculatrice, GSM, etc.) non admis.

Justifiez toujours vos réponses.

Question 1 On considère le modèle dynamique suivant

$$\dot{x} = x^2 - y + I \tag{1}$$

$$\dot{y} = a(bx - y) \tag{2}$$

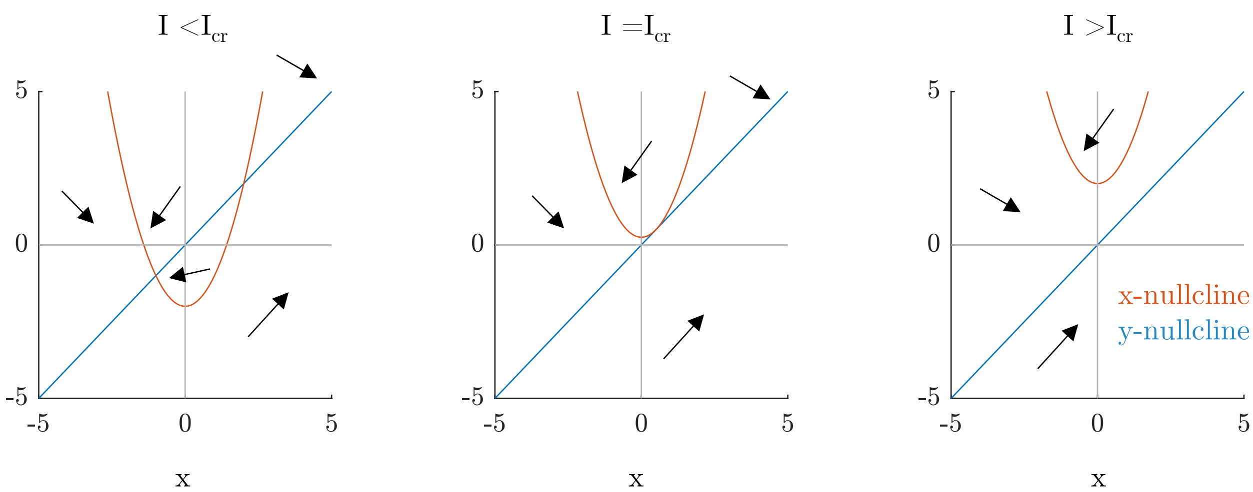
où $a > 0$, $b > 0$ et I est réel.

(i) Le système d'équations est-il linéaire ? Si non, identifiez les non-linéarités.
x^2

(ii) Calculez le(s) point(s) fixe(s) en fonction des différents paramètres a, b et I. cas 1 ($I < b^2/4$) : $(x^*, y^*) = (\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4I}}{2}, bx^*)$
cas 2 ($I = b^2/4$) : $(x^*, y^*) = (\frac{b}{2}, \frac{^2}{2})$
cas 3 ($I > b^2/4$) : aucune solution

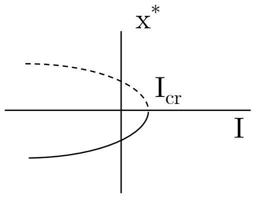
(iii) Identifiez la valeur critique I_{cr} à laquelle le nombre et/ou la nature des points fixes change. $I_{cr} = b^2/4$

(iv) Pour $b = 1$, $a = 1/10$, esquissez les plans de phase correspondants aux situations $I < I_{cr}$, $I = I_{cr}$, $I > I_{cr}$, en traçant qualitativement les champs de vecteur autour de chaque point fixe. Expliquez votre raisonnement.



(v) Comment le système évolue-t-il si on démarre au point $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$ dans les deux situations $I < I_{cr}$ et $I > I_{cr}$? Tracez qualitativement la trajectoire correspondante dans les plans de phase dessinés à la question précédente.

(vi) Esquissez un graphique qualitatif de la valeur des points fixes $\bar{x}$ en fonction de la valeur de I_{cr}. Les points fixes stables sont tracés par un trait plein, les points instables par un trait discontinu.



(vii) Que se passe-t'il si a devient égal à 1 dans les différents plans de phase que vous avez tracés ? Expliquez globalement l'effet. a permet de modifier la vitesse verticale dans le champs de vecteurs. Si a augmente, le champs de vecteur est plus rapide selon la direction verticale.

(viii) Identifiez la nature du (des) point(s) fixe(s) quand $I = I_{cr}$ (pour $a = 1/10$ et $b = 1$). Il suffit de calculer le jacobien évalué au fixe point x^*

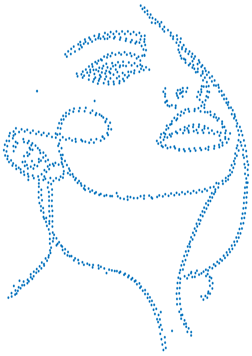
$$J = \begin{pmatrix} 2x^* & -1 \\ ab & -a \end{pmatrix}$$

Ensuite il faut trouver les valeurs propres associées à cette matrice : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 9/10$. Le point fixe est instable.

(ix) Est-ce que votre plan de phase en $I = I_{cr}$ correspond au résultat trouvé à la question (iii). Expliquez le phénomène observé. Les deux points fixes se rencontrent un coté est attractif, l'autre est répulsif.

(x) On considère maintenant que le parametre I est positif ou nul et b peut varier dans R^+. Comment cela impacte-t'il le plan de phase. Explique qualitativement les phénomènes que l'on va trouver à l'aide des dessins. b correspond à la pente de la y-nullcline et la parabole (associée à la x-nullcline) reste fixe. On va retrouver le même phénomène que lorsque I change. La droite va rencontrer la parabole en un point et ensuite former deux points fixes.

Question 2 On aimerait pouvoir dessiner n'importe quelle image à l'aide des séries de Fourier. Expliquez à l'aide des formules et de dessins comment on arrive à reproduire le trac'e de la jeune femme ci-dessous. Essayez d'etre structuré et pédagogique dans votre explication (max 1 page recto).



voir Devoir 2. Les points sont répartis entre expliquer le concept comme au devoir, la formule des séries de Fourier, le dessin et discuter de l'impact du degre.

Question 3 On aimerait équiper une voiture d'un tracker de position. Pour commencer le design de ce tracker, vous avez accès au modèle de la voiture de masse m sans controleur (open-loop system). Il s'agit d'une voiture miniature de 1kg pour tester à petit échelle votre controleur. L' entrée du système est la force exercée sur le moteur F_m. La sortie est la position de la voiture. On fait l'hypothèse de travailler en 1D, sans frottement.

aide : L'inverse d'une fonction

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \rightarrow X^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

(i) Donnez la représentation d'état de système. Indiquez les signaux d'entrée, de sortie et les variables d'état en précisant le domaine et les images associés aux signaux. Il suffit d'appliquer la loi de Newton : F = ma où F est la force appliquée à la voiture dans la direction du déplacement, m est la masse et a est l'accélération. Concluez en écrivant les matrices ABCD de votre système. entrée $u = F$ Force motrice (R+ in R)
sortie : $y = x$: position de la voiture (R+ in R)
variable :
$x_1 = x$: position de la voiture (R+ in R)
$x_2 = v$: vitesse de la voiture (R+ in R)
update laws : $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = u/m$ outpu law : $y = x_1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} (1 & 0) \end{pmatrix} \; D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Calculez analytiquement la fonction de transfert $H(s)$ du système associée à l'entrée correspondant à la force motrice pour prouver qu'elle est égale à $H(s) = \frac{1/m}{s^2}$. $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

(iii) Dessinez le diagramme de Bode en amplitude et en phase de la fonction de transfert H. Expliquez votre raisonnement étape par étape en repartant de la définition depuis la transformée de Laplace jusqu'à votre dessin. Le diagramme en amplitude a comme abscisse la pulsation selon une échelle linéaire (uniquement entre 1rad/s et 10 rad/s) et en ordonnée l'amplitude selon des unités naturelles selon une échelle linéaire. Le diagramme en phase est également dessiné avec la pulsation en abscisse selon une graduation linéaire (uniquement entre 1rad/s et 10 rad/s) et l'ordonnée est en degré selon une échelle linéaire également. Votre réponse doit se baser sur une decomposition et justification mathématique et pas seulement des phrases descriptives. Soyez clair·es et precis·es sur les graduations et les labels. voir Figure **??**

(iv) Donnez l'amplitude de H à la pulsation (en unité naturelle) et la phase à 1 rad/s et 10 rad/s. L'amplitude est égale à 1 en 1 rad/s et 1/100 en 10 rad/s.

(v) Dessinez le diagramme de Bode en amplitude de votre fonction de

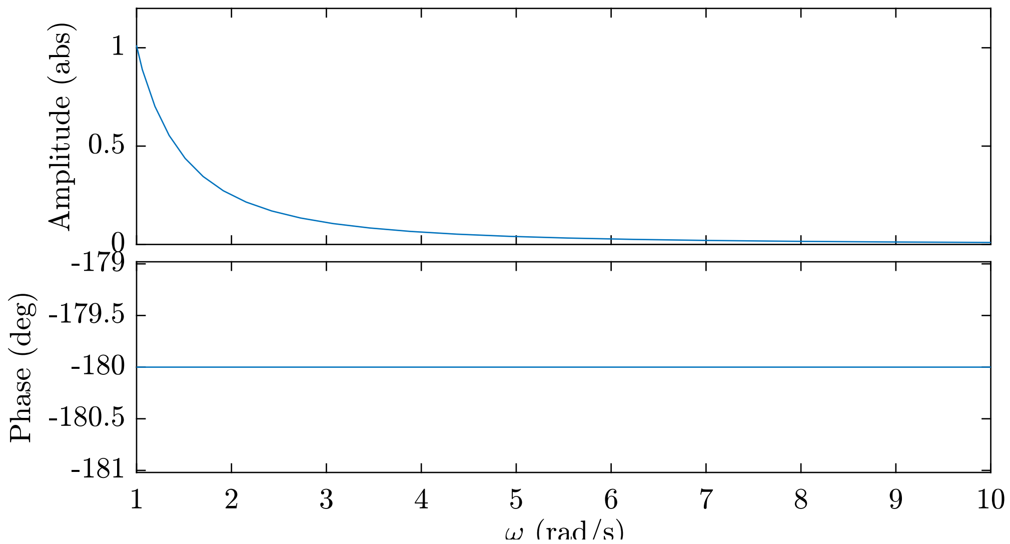


FIGURE 1 – H(s) dont l'amplitude est exprimée dans des unités naturelles et l'axe des abscisses est graduée linéairement. La phase est en degré.

transfert selon les conventions classiques c-à-d l'abscisse correspond à la pulsation selon une échelle logarithmique (entre 1 et 10 rad/s) et l'ordonnée correspond à l'amplitude en dB. Expliquez comment vous etes passé·es du diagramme de la question (iii) à celui-ci (sur base d'explications mathématiques). voir Figure **??**.

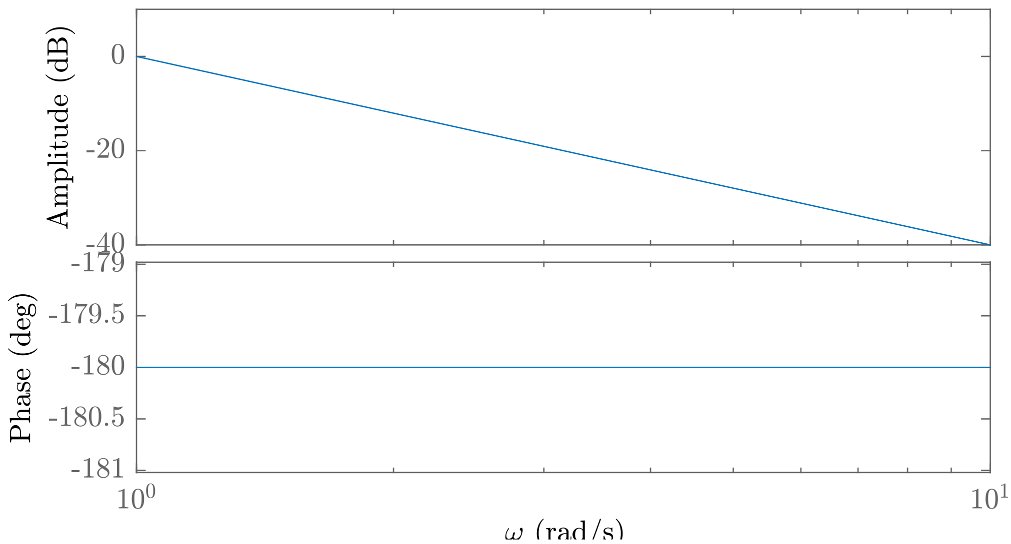


FIGURE 2 – H(s) dont l'amplitude est exprimée en unité dB et l'axe des abscisses est graduée en logarithmique. La phase est en degré.

(vi) Donnez l'amplitude de H à la pulsation (en dB) en 1 rad/s et en 10 rad/s.

$$20log(|H(1)|) = 0dB$$
$$20log(|H(10)|) = -40dB$$

(vii) Lorsque l'on mesure la position de la voiture, le capteur de position introduit un délai de 100 ms (0.1s). On note $\delta(t - t_0)$. Donnez sa transformée de Laplace $D(s)$. $D(s) = \exp(-t_0 s)$

(viii) Dessinez son diagramme de Bode en amplitude et en phase à la main. L'axe des abscisses des deux diagrammes indique la pulsation selon une graduation linéaire entre 1rad/s et 10rad/s. L'amplitude est exprimée en dB et la phase en degré. Expliquez comment vous dessinez ce diagramme de Bode à partir de l'expression analytique de votre transformée de Laplace. voir Figure **??**

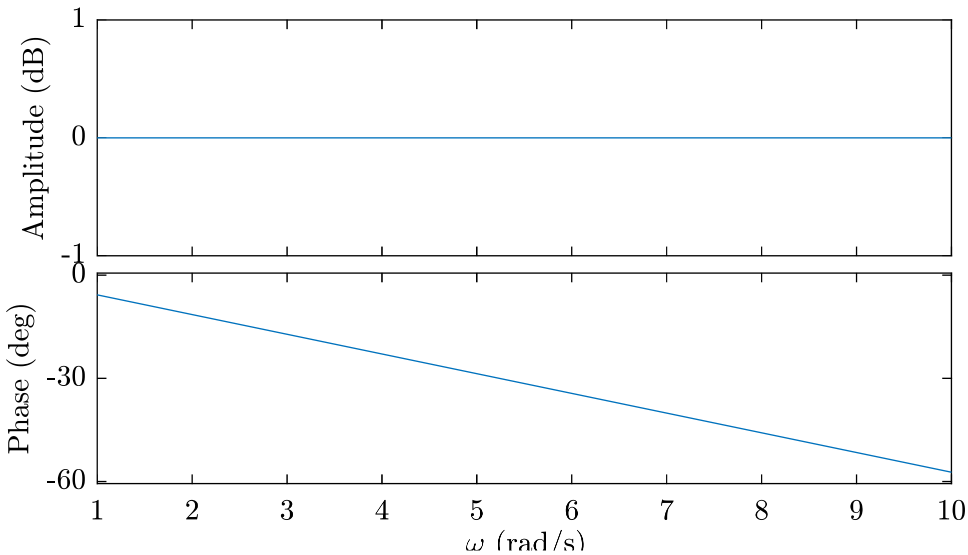


FIGURE 3 – D(s) dont l'amplitude est exprimée dans des unités dB et l'axe des abscisses est graduée logarithmiquement. La phase est en degré.

(ix) Donnez les valeurs analytiques de la phase en $\omega = 1rad/s$. et $10rad/s$. (*hint :* $180/\pi = 57.3; pi/180 = 0.0175$)

$$\angle D(1) = 180/\pi 0.1.1 = 5.73$$
$$\angle D(10) = 180/\pi 0.1.10 = 57.3$$

(x) Expliquez comment le délai va affecter le système complet constitué de H la fonction de transfert de la voiture en série avec le capteur. Pour cela, utilisez les expressions analytiques des fonctions de transferts H et D. Les deux diagrammes vont se multiplier (si on travaille dans les unités naturelles). La phase va donc subir une chute linéaire avec une pente de 0.1.