SYST0002 – Introduction aux signaux et systèmes

Examen

21 Aout 2021

Consignes

• Durée : 3h.

• Une nouvelle feuille pour chacune des 3 questions **et** la feuille annexe de la Question 3(ii).

• Indiquez votre nom, prénom et matricule sur chaque feuille.

• Appareils électroniques (calculatrice, GSM, etc.) non admis.

Justifiez toujours vos réponses.

Question 1 On considère le modèle dynamique suivant ou les deux variables x et y sont définies entre -6 et 6.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos(y) \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

On peut approximer $\pi/2 = 1.57$, $\pi = 3.14$, $3\pi/2 = 4.71$ et $2\pi = 6.28$.

(i) Le système d'équations est-il linéaire ? Si non, identifiez toutes les non-linéarités.

non linéaire, $\cos(y)$

(ii) Calculez le(s) point(s) fixe(s) ainsi que leur type (noeuds stable/instable, spirale stable/instable, point de selle, etc.).

Les points fixes sont donnés par PF (0,$k\pi/2$) pour $k \in \{-3,-1,1,3\}$.

Le jacobien est égal à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(y) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

stabilité du PF pour $k \in \{-3,1\}$= : calcul de VaP : $\pm i \rightarrow$ centre

stabilité du PF pour $k \in \{-1,3\}$: calcul de VaP : $\pm 1 \rightarrow$ point de selle

(iii) Esquissez le plan de phase en traçant qualitativement les champs de vecteur autour de chaque point fixe.

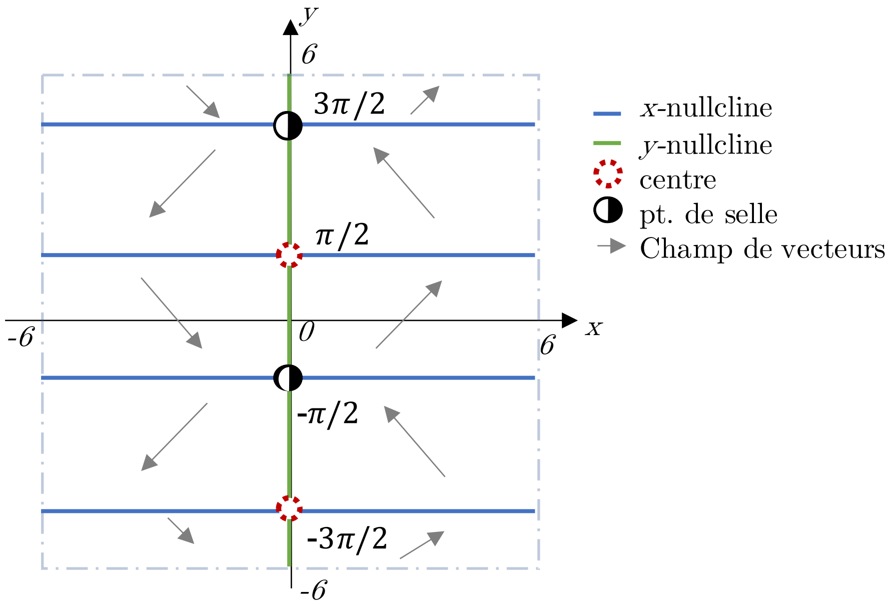
(iv) Comment le système évolue-t-il si on démarre au point A $(x_0, y_0) = (-1,4)$?

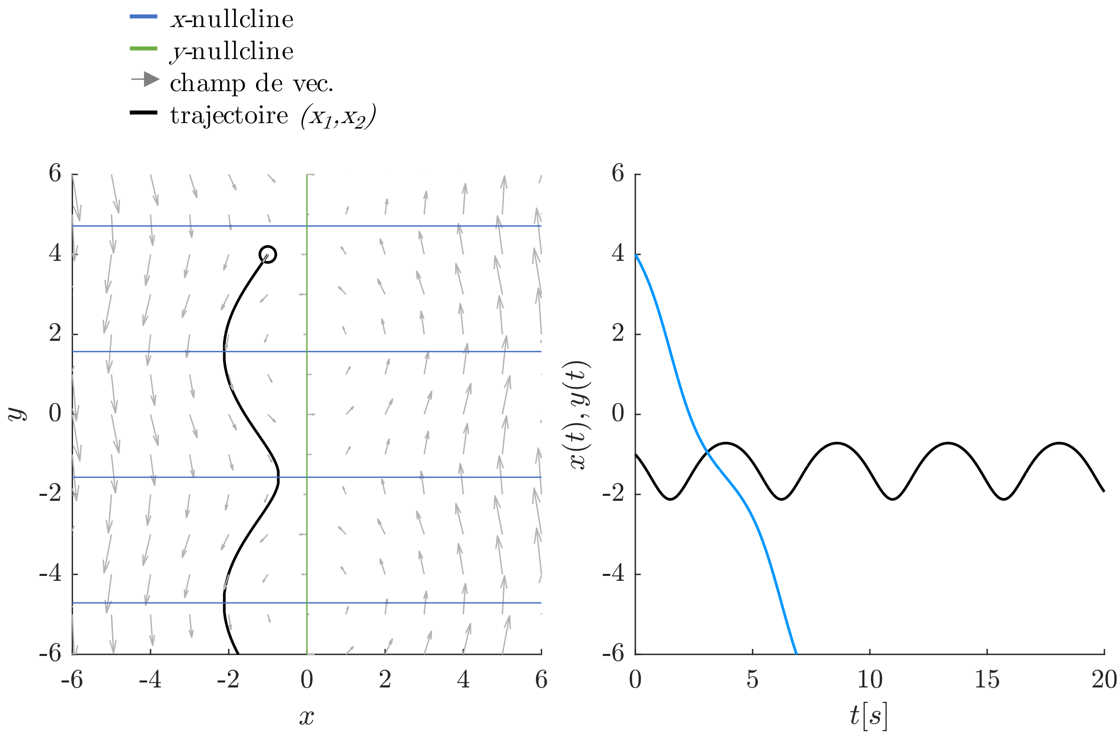
•Tracez qualitativement la trajectoire correspondante dans le plan de phase.

• Tracez qualitativement l'évolution temporelle de la variable $x(t)$ et $y(t)$ sur un même graphique. Indiquez clairement la légende et les labels de vos axes.

(v) Discutez les directions préférentielles (linéarisées) d'un seul point de selle de votre choix. Discutez les vitesses associées à ces directions.

Pour le point fixe (0,$3\pi/2$) ; il suffit de calculer les vecteurs propres





associées aux valeurs propres $\lambda = \pm 1$ en résolvant le calcul suivant

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

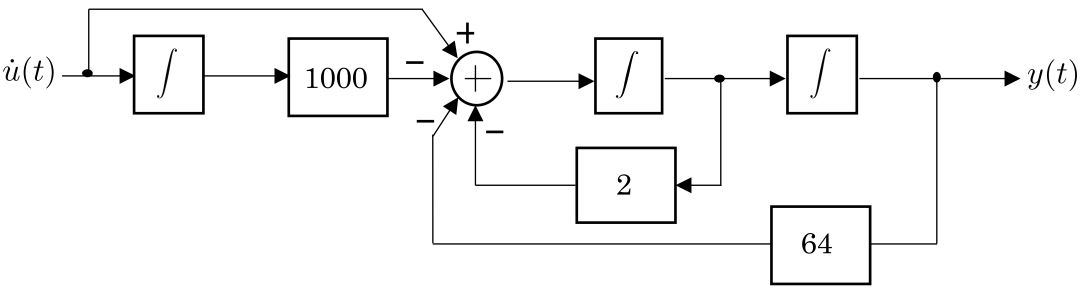
On obtient le vecteur propre (1,1) pour la valeur propre $\lambda = 1$ et le vecteur propre (1,-1) pour la valeur propre $\lambda = -1$. Le bassin d'attraction associée à un point fixe est formé des deux droites dont les directions sont données par les vecteurs propres et passant par ce point fixe. Les deux valeurs propres donnent une indication sur la vitesse avec laquelle le point se déplace selon ces directions préférentielles. Ici, les deux valeurs propres ont la même amplitude. Une particule dans le plan de phase se déplace à la même vitesse selon ces deux directions.

(vi) Quel est l'effet de la modification $\dot{y} = -x$ sur la dynamique du système ? Justifiez graphiquement dans le plan de phase.

La composante vitesse selon la verticale est inversée. Une flèche qui pointait vers le bas à droite pointera maintenant vers le haute à droite (...).

Question 2 (i) On considère un système décrit par le bloc diagramme suivant
Donnez l'équation différentielle gouvernant le système.

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 64y = \dot{u} - 1000u$$

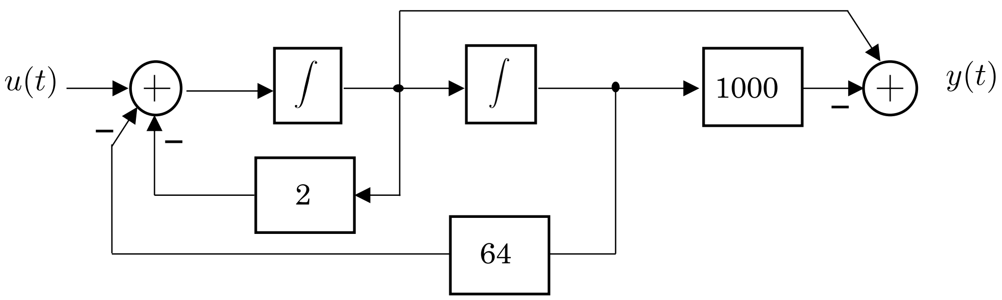


(ii) Transformez le bloc diagramme avec seulement deux blocs intégrateurs en utilisant une variable auxilliaire.
Il suffit de faire intervenir une variable auxillaire v pour transformer le système.

$$\begin{aligned} x_1 &= v \\ x_2 &= \dot{v} \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} y &= -1000x_1 + x_2 \\ \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -64x_1 - 2x_2 + u \end{aligned}$$



(iii) Donnez la fonction de transfert du système.
solution 1 : depuis les matrices ABCD extraites de la représentation d'état

$$H = C(sI - A)^{-1}D$$

solution 2 : depuis l'équation d'entrée sortie obtenue au point (i)

$$H = \frac{s - 1000}{s^2 + 2s + 64}$$

(iv) Dessinez le diagramme de bode en amplitude et en phase.

• Détaillez la construction du diagramme sur base de développement analytique de la décomposition en amplitude et en phase si les outils vus en cours ne sont pas applicables.
• L'axe des abscisses est gradué selon une échelle logarithmique entre 1 rad/s et 10000 rad/s. L'amplitude est donnée en décibels.
• Dessinez avec soin les diagrammes en indiquant explicitement les informations nécessaires à la compréhension des courbes (gain statique, pente, amplitude des pics si présents, la valeur de l'amplitude et de la phase en w=10000rad/s,...)
• Convention mathématique :
si a >0 : arctan(b/a) => arctan(b/a)
si a <0 : arctan(b/a) => arctan(b/a)+π
La fonction arctan est dessinée à la fin de la Question 2.
• Des approximations numériques sont disponibles à la fin de la Question 2.

En décomposant la fonction de transfert en numérateur et dénominateur, on peut construire le diagramme de bode final.
Le numérateur, $N(s) = s - 1000$,ne présente pas la forme canonique. Il faut donc décomposer en amplitude et en phase.

$$\begin{aligned}
|N(s)| &= \sqrt{1e6 + w^2} \\
\angle N(s) &= \text{arctan}(\frac{w}{-1000}) + pi \\
\text{gain statique :}|N(0)| &= 1000 \rightarrow \text{en unité dB :} 20\log(1000) = 60\text{dB}
\end{aligned}$$

Le dénominteur, $D(s) = \frac{1}{s^2+2s+64}$ correspond à une forme canonique du 2ème ordre. Il suffit de calculer les éléments caractéristiques.

$$\begin{aligned}
w_0 &= 8 \\
\zeta &= 1/8 < \sqrt{2}/2 \rightarrow \text{présence d'un pic à la pulsation de résonance} \\
w_r &= w_0\sqrt{(1-2\zeta^2)} = 7.8 \approx 8\text{rad/s} \\
|D(w_r)| &= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 4[-] \rightarrow \text{en unité dB :} 20\log(4) = 12\text{dB} \\
\text{gain statique :}|D(0)| &= 1/64 \rightarrow \text{en unité dB :} 20\log(1/64) = -36\text{dB}
\end{aligned}$$

Données numériques arrondies et graphique de arctan(x)

$20log_{10}(3)$	9.5
$20log_{10}(4)$	12
$20log_{10}(32)$	30
$20log_{10}(64)$	36
$\sqrt{31/32}$	0.98
$\sqrt{63/64}$	1
$\sqrt{15/16}$	0.97
$\sqrt{99998/1e^6}$	0.32

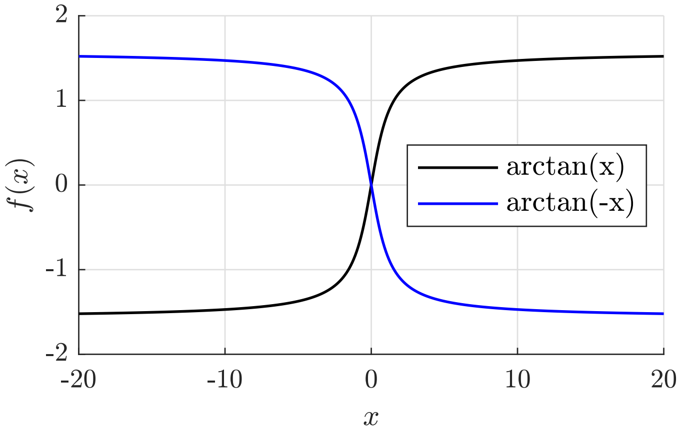
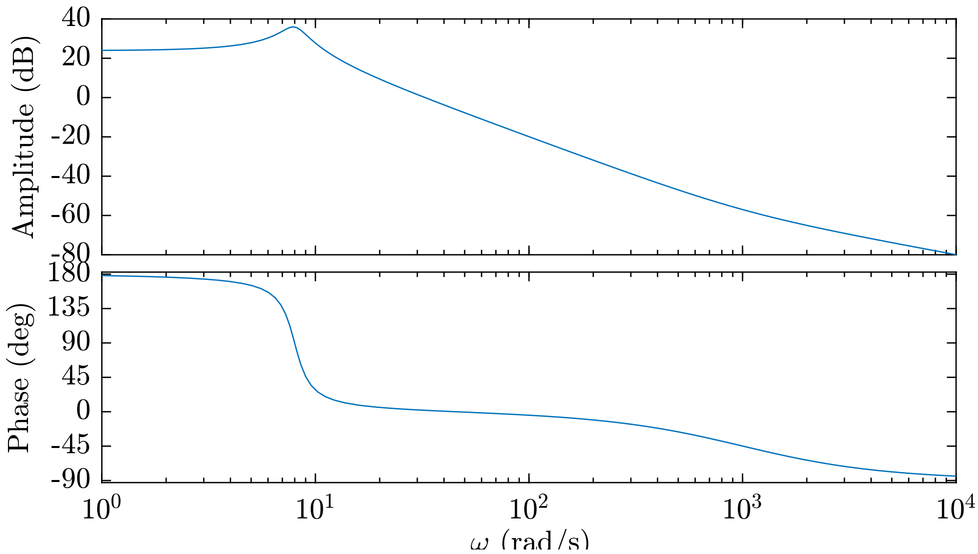
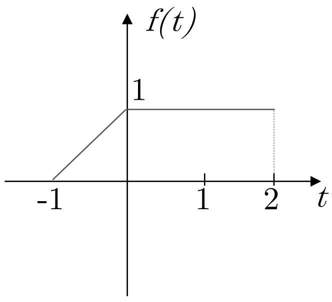
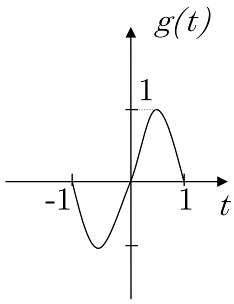


Diagramme de Bode



Question 3 (i) On donne deux signaux dessinés ci dessous :





On souhaite démarrer le calcul du produit de convolution $y(t) = f(t) * g(t)$ de manière graphique. $f(t)$ est définie par segment et $g(t)$ est une sinusoïde.

• Donnez les différents intervalles de t sur lesquels le calcul de la convolution va se décomposer.

• Écrivez l'intégrale à effectuer sur chaque intervalle de t en indiquant clairement les bornes et l'expression des signaux f et g considérées sur chaque intervalle. Il n'est pas demandé de résoudre l'intégrale mais simplement de mettre en équation avec les données disponibles.

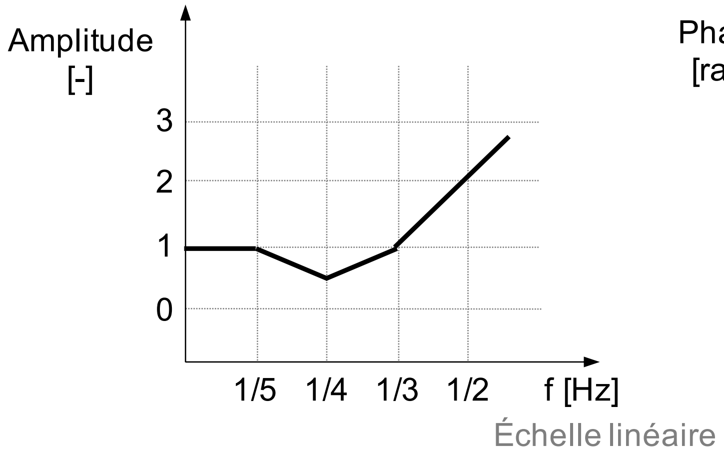
$$\begin{aligned}
t < -2 &\quad : \quad y(t) = 0 \\
t \in [-2; -1[&\quad : \quad y(t) = \int_{-1}^{t+1} (\tau + 1) \sin(\pi(t - \tau)) d\tau \\
t \in [-1; 0[&\quad : \quad y(t) = \int_{-1}^{0} (\tau + 1) \sin(\pi(t - \tau)) d\tau + \int_{0}^{t+1} \sin(\pi(t - \tau)) d\tau \\
t \in [0; 1[&\quad : \quad y(t) = \int_{t-1}^{0} (\tau + 1) \sin(\pi(t - \tau)) d\tau + \int_{0}^{t+1} \sin(\pi(t - \tau)) d\tau \\
t \in [1; 3[&\quad : \quad y(t) = \int_{t-1}^{2} \sin(\pi(t - \tau)) d\tau \\
t >= 3 &\quad : \quad y(t) = 0
\end{aligned}$$

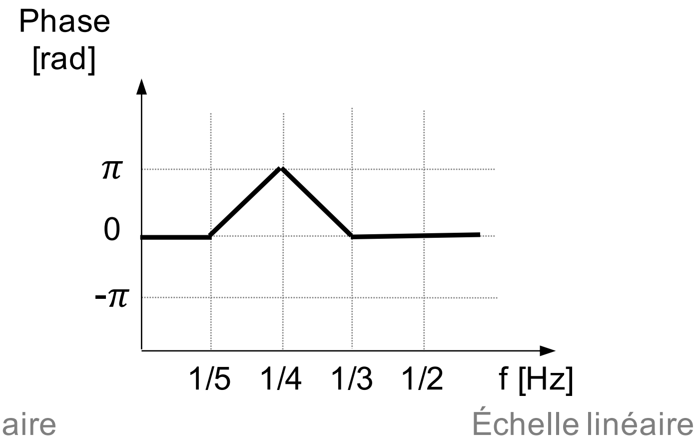
(ii) En tant qu'ingénieur(e) du son, on vous envoie le spectrogramme d'une chanson jouée sur un instrument de musique. Ce son n'a subit aucun déphasage. On vous demande de compléter la feuille suivante ce qui signifie :

• Donnez le contenu fréquentiel complet du signal.

• On vous demande de rectifier le son à l'aide du filtre donné ci-dessous. Donnez le spectrogramme du nouveau son et son contenu fréquentiel. Indiquez les valeurs sur les axes, les labels, les unités. Soyez précis dans le remplissage des différents schémas.

(iii) Expliquez un seul concept du cours parmi les concepts suivants : smearing, recouvrement de spectre (aliasing), leakage, série de Fourier, région de convergence d'une transformée (maximum 1/2 page).

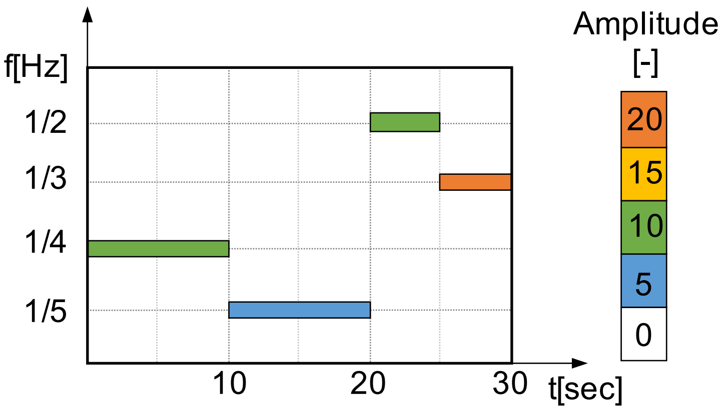

Amplitude
[-]
3
2
1
0
1/5
1/4
1/3
1/2
f [Hz]
Échelle linéaire


Phase
[rad]
π
0
-π
1/5
1/4
1/3
1/2
f [Hz]
Échelle linéaire

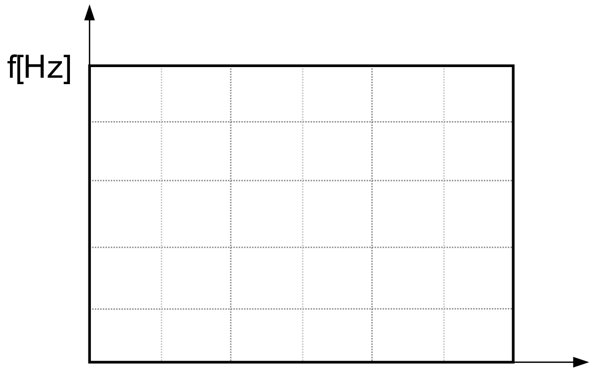
Feuille à rendre complétée à la fin de l'examen

NOM :
Prénom :
Matricule :

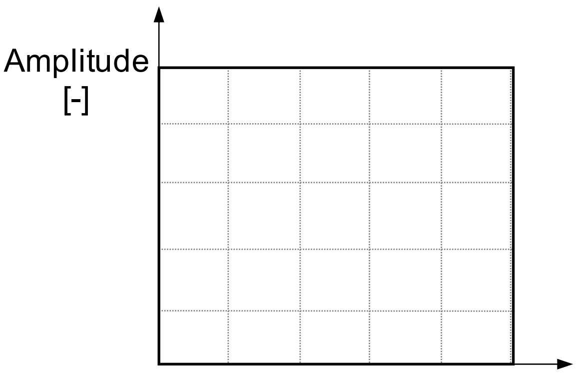
Sepctrogramme du son d'entrée

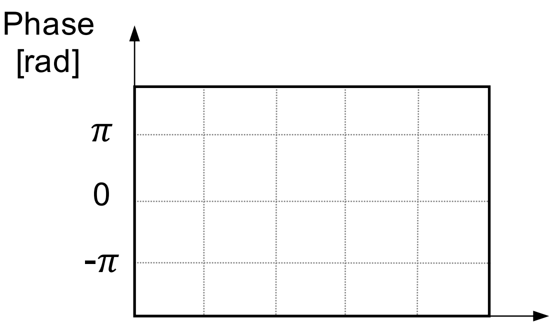


Sepctrogramme du son de sortie

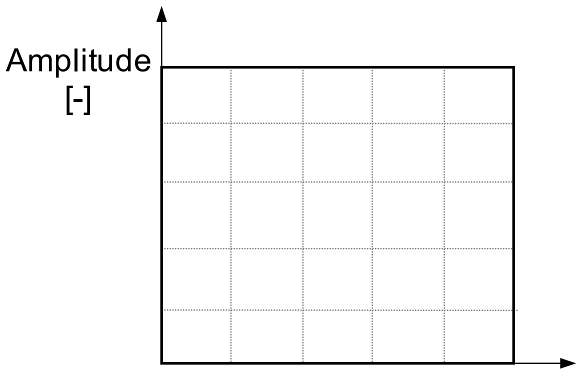


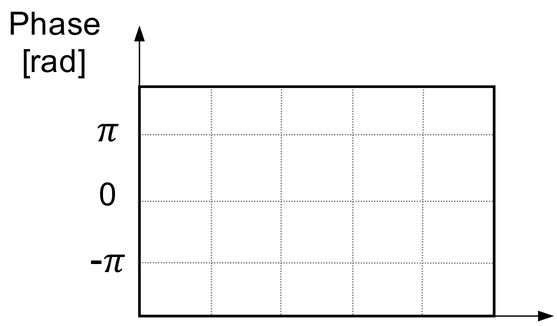
Contenu fréquentiel total du signal d'entrée



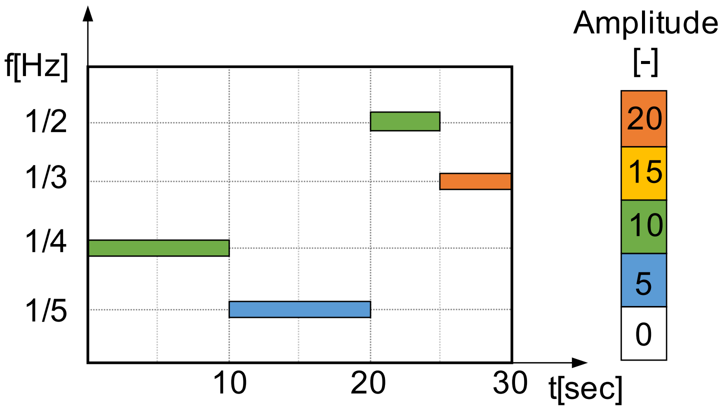


Contenu fréquentiel total du signal de sortie

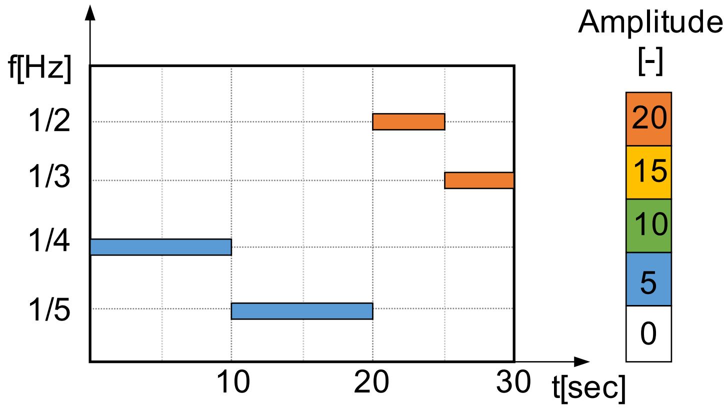




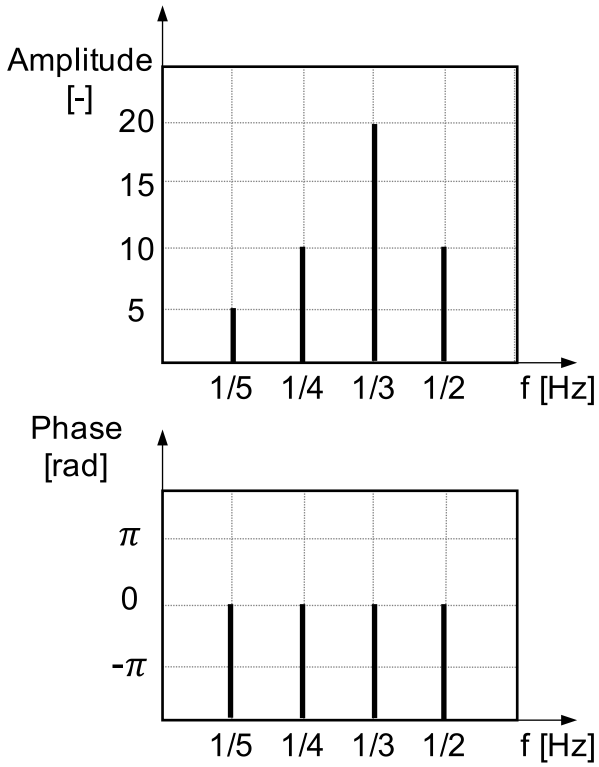
Sepctrogramme du son d’entrée



Sepctrogramme du son de sortie



Contenu fréquentiel total du signal d’entrée



Contenu fréquentiel total du signal de sortie