LIÈGE université
Sciences Appliquées

SYST0002 - Introduction aux signaux et systèmes

Projet : Dynamique et contrôle de véhicule

Professeurs	Guillaume Drion & Alessio Franci
Assistants	Antoine Debor & Caroline Dejace

Année académique 2024 - 2025

Consignes

Délivrables

- Ce projet doit être réalisé par groupe de **2** étudiants.
- Ce projet contient 3 parties différentes qui doivent être réalisées à **chaque fois par le même groupe** de 2 étudiants.
- **Deadlines** des différentes parties :

  Part. 1 → Vendredi 21/03/25, 23h59 (heure belge)
  Part. 2 → Vendredi 18/04/25, 23h59 (heure belge)
  Part. 3 → Vendredi 16/05/25, 23h59 (heure belge).

- Soumission de chaque partie (rapport et codes) via Gradescope :
  - ⋆ Chaque étudiant doit s'inscrire sur Gradescope en utilisant son adresse @student.uliege.be. Si vous ne voyez pas le cours SYST0002 dans votre tableau de bord, contactez-nous sur Ed au plus vite (n'attendez pas la veille de la date de soumission pour vérifier que vous avez accès au cours sur Gradescope ;-).
  - ⋆ N'oubliez pas d'assigner les pages de votre pdf aux questions sur Gradescope !

  Si vous n'êtes pas familiers avec Gradescope, vous trouverez des explications sur chaque étape de la soumission ci-dessous :
  - ⋆ Soumission de pdf,
  - ⋆ Soumission de code,
  - ⋆ Ajout de membres de groupe.
- Les projets envoyés par email ne seront **pas** acceptés.
- Le rapport doit être dactylographié et écrit en LaTeX en suivant le *template* fourni sur la page web du cours (*i.e. report_template.tex*). Interdiction de modifier la police ou les marges !
- Le rapport final (*i.e.* à rendre pour la deadline 3) fera **maximum 15 pages dont maximum 7 de texte**. Soyez donc concis, clairs et précis.
- Les codes peuvent être écrits en Matlab, Python ou Julia (au choix), dans un notebook Jupyter ou dans des scripts.
- Portez une attention particulière à vos figures ! Les valeurs des axes doivent être **lisibles**, les labels des axes doivent être **clairs** et accompagnés de leur unité. Essayez d'avoir des figures les plus épurées possibles : affichez seulement sur vos axes les valeurs nécessaires et suffisantes pour la compréhension de la figure. Par exemple, si vous avez une sinusoïde centrée en 0 et oscillant entre -2 et 2, votre axe y ne devrait comporter que les valeurs -2, 0 et 2, les seules valeurs utiles à la compréhension de votre graphique.
  → le soin et la lisibilité apportés aux figures sont évalués.

Questions

Toutes vos questions sur le projet doivent être postées dans le forum de Ed Discussion du cours sous la catégorie Projet (une question par fil de discussion). Ces questions peuvent être posées publiquement, de manière anonyme pour les autres étudiants ou non, ou en privé. Lorsque votre question peut profiter aux autres étudiants, et qu'elle ne comporte pas d'éléments de votre réponse, n'hésitez-pas à la poser publiquement. Dans la même idée, n'hésitez-pas à répondre à une question si vous pensez en connaître la réponse. Un membre du staff vérifiera toujours si celle-ci est correcte. Des *office hours* pourront éventuellement être organisées si un certain nombre d'étudiants en font la demande. Si vous rencontrez des problèmes pour accéder au forum, veuillez en avertir les assistants par e-mail.

Politique de collaboration

Vous pouvez discuter du devoir avec d'autres groupes, mais vous devez écrire vous-même vos propres solutions, et écrire et exécuter vous-même votre propre code. Copier la solution de quelqu'un d'autre, ou simplement apporter des modifications triviales pour ne pas copier textuellement, n'est pas acceptable.

Mise en situation

Un problème courant en contrôle est de contrôler la trajectoire d'un véhicule via un *actuator* qui provoque un changement d'orientation de ce véhicule. Le volant d'une voiture ou le guidon d'une bicyclette sont deux exemples d'*actuator*. Dans de nombreux cas, il est possible de comprendre le comportement de base de tels systèmes en utilisant un modèle simple qui capture la cinématique du système.

Considérons un véhicule standard avec un essieu arrière fixe et un essieu avant dont les roues peuvent tourner. Considérons b comme étant la distance entre les roues avant et arrière, v comme étant la vitesse linéaire du centre de masse, et a comme étant la distance entre les roues arrière et le centre de masse. On s'intéresse à l'évolution temporelle de la position $y(t)$ du véhicule selon l'axe vertical, lorsqu'il évolue à vitesse constante et que la direction de ses roues avant varie au cours du temps. Un schéma de la géométrie peut être trouvé à la Figure 1.

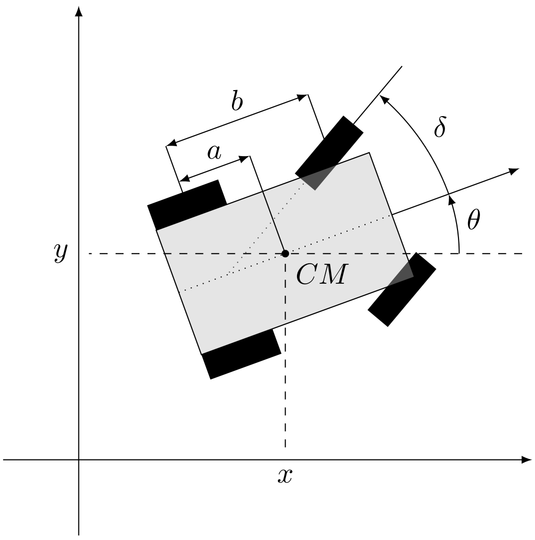

FIGURE 1 – Schéma du modèle considéré.

En supposant qu'il n'y a pas de glissement des roues et que chaque paire de roues peut être rassemblée en une seule roue, les équations de mouvement [1] sont alors :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \sin\left(\alpha(\delta(t)) + \theta(t)\right) \\ \frac{v_0 \sin \alpha(\delta(t))}{a} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \alpha(\delta(t)) = \arctan\left(\frac{a \tan\left(\delta(t)\right)}{b}\right) \tag{1a}$$

$$s(t) = y(t) \tag{1b}$$

où s représente la sortie de ce système, $v_0 \neq 0$ est une vitesse constante et où α lie la dynamique des roues à la dynamique de y.

1. Notez que la fonction arctan(.) renvoie un angle dans [-90°, 90°] (ou $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

Part 1 : Modèle d'état, linéarisation et simulations

Questions

1. Le système (1) est-il linaire ou non-linéaire ? Justifiez.
2. Indiquez explicitement quelle(s) est(sont) l'(les) entrée(s), la(les) sortie(s) et la(les) variable(s) d'état. Donnez une interprétation physique à tous ces signaux. Donnez également le domaine de définition et le domaine image de tous ces éléments.
3. Simulez le système (1) de $t = 0$ à $t_{\text{final}} = 100$ [sec] avec $v_0 = 10$ [m/sec], $a = 1.1, b = 3.3$ [m], $(y(t = 0), \theta(t = 0)) = (2, 0)$. Tracez l'évolution temporelle de votre(vos) entrée(s), de vos variables d'état ainsi que de votre(vos) sortie(s) pour $\delta(t) = 0$ et $\delta(t) = -\frac{\pi}{2}\sin(2\pi \times 0.1 \times t)$. Qu'observez-vous ? Donnez une explication à la (aux) sortie(s) observée(s) dans les 2 cas.
4. Déterminez tous les points d'équilibre du système. Justifiez.
5. Donnez les matrices d'état A, B, C, D du système pour chaque point d'équilibre. Justifiez.
6. Analysez la nature de tous les points d'équilibre trouvés. Justifiez.
7. Simulez le modèle non-linéaire ainsi que le modèle A, B, C, D correspondant au point d'équilibre $(y^*, \theta^*, \delta^*) = (0, 0, 0)$ pour les mêmes valeurs de paramètres qu'au point 3 et en choisissant (0,0) comme conditions initiales.

   Considérez les trois cas suivants pour le signal $\delta(t)$:

   (a) $\delta(t) = 0$
   (b) $\delta(t) \in [1, 5]$ [°] (valeur de votre choix dans cet intervalle)
   (c) $\delta(t) \in [10, 20]$ [°] (valeur de votre choix dans cet intervalle).

   Comparez la réponse de votre modèle linéaire à celle du modèle non-linéaire pour les valeurs de paramètres et de conditions initiales considérées. Que pouvez-vous en déduire ?
8. Simulez le système (1) pour les mêmes valeurs de paramètres qu'au point 3 et en choisissant (0,0) comme conditions initiales. Déterminez quel devrait être approximativement $\delta(t)$ pour que le véhicule respecte la trajectoire de la Figure 2 donnée par $\frac{25}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ avec $\mu = 50$ et $\sigma = 5$. Indiquez votre méthode pour déterminer ce δ. Donnez également la *mean square error* entre la trajectoire attendue et votre trajectoire trouvée. Simulez le modèle A, B, C, D associé à $(y^*, \theta^*, \delta^*) = (0, 0, 0)$ avec votre δ trouvé et montrez le résultat.
   Suggestion : $\delta(t)$ devrait être une combinaison de Gaussiennes (i.e. une combinaison de fonctions $\frac{A_i}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\exp\left(\frac{-(t-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$).

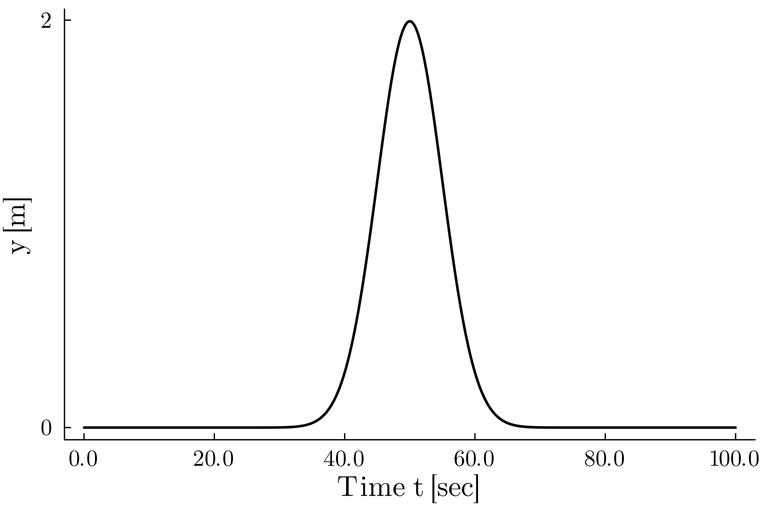

FIGURE 2 – Trajectoire attendue pour y

Part 2 : State-feedback controller, simulations et analyse de Fourier

Lorsque l'on désire suivre une trajectoire bien précise, trouver une expression $\delta(t)$ n'est pas toujours évident. Au cours du temps, la référence que l'on tente de suivre peut également être modifiée, et il faut alors modifier le signal d'entrée en conséquence. Une solution satisfaisante serait de construire un système qui automatiserait cette modification du signal d'entrée.

De manière générale, on parlera de *contrôle* d'un système lorsque l'on désire automatiser la génération d'un signal d'entrée permettant à ce système de suivre une référence. Dans le cadre de ce projet, le contrôle de la trajectoire est rendu possible en insérant le système entrée-sortie étudié dans la première partie dans une boucle de contrôle (*control-loop*) comprenant un contrôleur. Le système à contrôler, *i.e.* le système entrée-sortie étudié dans la première partie, est appelé *open-loop system* ou *plant*. Le contrôleur compare la sortie (ou les états) du *plant* avec une référence donnée et utilise cette comparaison pour donner en sortie un signal de contrôle qui sera alors utilisé comme entrée pour le *plant*.

L'objectif est donc que la sortie du système contrôlé (aussi appelé *control-loop system*) suive une référence spécifique potentiellement variable avec le temps. De nombreux types de contrôleur existent (non-linéaires et linéaires). Parmi les contrôleurs linéaires, 2 types sont très connus : le contrôleur Proportionnel - Intégrateur - Dérivateur (ou PID) et le contrôleur par feedback d'état (*state-feedback* en anglais). C'est ce dernier type de contrôleur que nous allons utiliser.

Le *state-feedback controller* suppose un cas idéal où tous les états x du système *open-loop* peuvent être mesurés directement [2]. Le *state-feedback controller* assigne une combinaison linéaire des états et de la référence r comme signal de contrôle (*i.e.* $u = -Kx + k_r r$ où K comprend des gains de *feedback* $k_1, k_2, \ldots k_n$ (avec n le nombre d'états) alors que k_r est un gain de *feedforward*). On peut alors choisir arbitrairement les valeurs des gains $k_1, k_2, \ldots, k_n$ afin de satisfaire des performances spécifiques et désirées (par exemple la stabilité, le temps de réaction, le temps de stabilisation, sa robustesse aux changements de référence ou perturbation, ou encore l'erreur statique entre r et le système après convergence).

Notre problème de contrôle peut donc être représenté comme à la Figure 3.

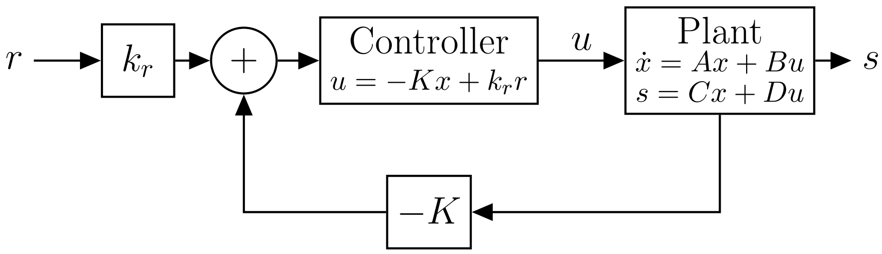

FIGURE 3 – Système de contrôle pour le contrôle de la trajectoire du véhicule

2. Notez qu'en général, ce n'est pas le cas et il faut plutôt passer par un observeur qui va estimer les états.

Questions

1. Selon le bloc diagramme de la Figure 3, indiquez explicitement quelle(s) est(sont) l'(les) entrée(s), la(les) sortie(s) et la(les) variable(s) d'état du système total formé par la mise en série du contrôleur et du *plant*. Donnez une interprétation physique à tous ces signaux. Donnez également les domaines de définition et les domaines images de tous ces éléments.
2. Selon le bloc diagramme de la Figure 3, donnez les nouvelles matrices $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ du système formé par la mise en série du contrôleur et du *plant*. Mettez en évidence la relation entre les matrices A, B, C, D et $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$.
3. Simulez le modèle *control loop* (associé à $(y^*, \theta^*, \delta^*) = (0, 0, 0)$) dans les mêmes conditions qu'au point 7 de la Part 1, en considérant la référence $r = \mathbb{I}(t - 10)$ et les valeurs de gains du contrôleur $(k_1, k_2) \in \{(0.132, -0.0132), (0.132, 0.5148), (0.132, 1.1088)\}$ et $k_r = 1$. Tracez l'évolution temporelle de votre(vos) entrée(s), votre(vos) sortie(s), vos variables d'état ainsi que $\delta(t)$. Pour chaque signal, tracez cette évolution pour les différents couples de gains sur un même graphe. Qu'observez-vous ? Donnez une explication à vos observations en vous basant notamment sur la matrice $\tilde{A}$.
4. Simulez le modèle total avec $r = 2\sin(2\pi f t + \frac{\pi}{6})$ pour $f = f_1 = 0.01$ [Hz], $f = f_2 = 0.2$ [Hz], $f = f_3 = 1$ [Hz] et $f = f_4 = 10$ [Hz]. Les autres paramètres sont $v_0 = 10, a = 1.1, b = 3.3, t_{\text{final}} = 100$, $(0, 0)$ pour les conditions initiales, $(k_1, k_2) = (0.132, 0.5148)$ et $k_r = k_1$. Qu'observez-vous ?
5. Calculez la représentation de Fourier des signaux d'entrée du modèle total pour les 4 fréquences du point précédent (et pour les mêmes paramètres). Justifiez.
6. Tracez, de manière numérique et sur un même graphe, les diagrammes d'amplitude (absolue) des signaux d'entrée et de sortie pour les 4 fréquences du point 4. Faites de même pour les diagrammes en phase (unité en °). Qu'observez-vous ? Vérifiez que votre résultat pour les signaux d'entrée correspond bien à ce que vous avez trouvé au point 5.

Part 3 : Fonction de transfert et diagrammes de Bode

Questions

1. Calculez la fonction de transfert du système total de r vers s et indiquer sa/ses ROC(s) possibles en considérant les mêmes paramètres qu'au point 4 de la Part 2. Quel(s) système(s) est(sont) stable(s) et pourquoi ?
2. Donnez les pôles et les zéros de cette fonction de transfert.
3. Tracez, de manière numérique, les diagrammes de Bode en amplitude (unité en dB) et en phase (unité en °). Mettez en relation vos diagrammes avec les propriétés de la fonction de transfert (pôles, zéros, ...).
4. Sur base des diagrammes de Bode de la fonction de transfert, expliquez/justifiez vos résultats du dernier point de la Partie 2.