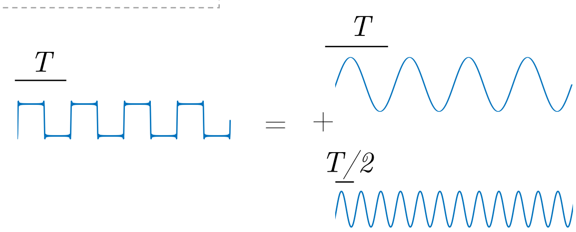
TP9 : Transformée de Laplace

1 Concept

Série de Fourier TP7



+ ...

La série de Fourier est un outil mathématique qui permet de décomposer un signal périodique de période T en une somme de signaux harmoniques de périodes multiples de T.

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathcal{Z}} \hat{x}_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}}$$

Il s'agit donc d'une *somme pondérée* d'exponentielles complexes (*ie.* cosinus et sinus) de périodes multiples de T. Les *poids* de chaque harmonique sont déterminés par les **coefficients de Fourier** définis par :

$$\boxed{\hat{x}_k = \int_0^T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\mathrm{d}t,\ k \in \mathcal{Z}}$$

PROBLÈME: Que faire si le signal n'est pas périodique ?

SOLUTION: On utilise la transformée de Fourier

Transformée de Fourier TP8

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t} \qquad \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega}$$

Pour que la transformée soit définie, il faut que l'intégrale existe :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t < \infty$$

On dit que *x(t)* est intégrable si cette condition est respectée.

PROBLÈME: Que faire si le signal n'est pas intégrable? Comme par exemple : $x(t)=t$, t^2, ...

SOLUTION: TP9

- On multiplie le signal *x(t)* par une exponentielle du type $e^{-\sigma t}$.
- On obtient un nouveau signal : $x(t)e^{-\sigma t}$
- On calcule la transformée de Fourier de ce nouveau signal :

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)e^{-\sigma t}\right] e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\mathrm{d}t$$

On note $s = \sigma + j\omega$ qui est défini comme une *fréquence complexe* et qui permet d'introduire la transformée de Laplace.

Transformée de Laplace

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t}$$

Résumé

Périodique ?
OUI → Série de Fourier
NON → Intégrable ?
OUI → Transformée de Fourier
NON → Transformée de Laplace

1.1 Définitions

Pour un signal $x(t)$, la **transformée de Laplace** est définie par :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

On note la décomposition de s en parties réelle et imaginaire $s = \sigma + j\omega$.
Le signal $x(t)$ est la **transformée inverse de Laplace** de $X(s)$ telle que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}\mathrm{d}\omega.$$

Cette relation exprime le signal $x(t)$ comme une combinaison (infinie) de sinusoïdes exponentiellement croissantes ou décroissantes [section 6.4-TXB théorie]. La transformée inverse est rarement évaluée en intégrant sur le plan complexe. On essaye de se rapporter à des transformées connues en utilisant les propriétés des transformées.

Remarque : L'argument indiqué comme variable de la transformée $X(.)$ correspond à l'exposant de l'exponentielle se trouvant dans l'intégrale :

- Pour la transformée de Fourier : $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$
- Pour la transformée de Laplace : $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t$

Remarque 2 : On notera parfois la transformée de Laplace $\mathcal{L}(s)$ pour la différencier de la transformée de Fourier, que l'on note aussi parfois $\mathcal{F}(j\omega)$.

1.2 Région de convergence

La région de convergence (*Region Of Convergence* en anglais, ROC) de la transformée de Laplace est l'ensemble des valeurs complexes de la variable s pour lesquelles l'intégrale converge :

$$ROC_x = \left\{ s \in \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t \text{ converge} \right\}.$$

Comme indiqué dans la section 1.1, la présence de l'exponentielle $e^{-\sigma t}$ permet la création d'un nouveau signal $x(t)e^{-\sigma t}$ permettant l'intégration. Cependant, il faut choisir correctement l'intervalle de valeurs possibles pour σ afin que l'intégrale soit bien définie. En effet, si $x(t)e^{-\sigma t}$ présente un caractère croissant infini, ce nouveau signal n'est pas intégrable.

Formellement, la ROC de la transformée de Laplace est l'ensemble des s tels que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t \quad \exists$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t\right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)||e^{-st}|\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)||e^{-\sigma t}|\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}\mathrm{d}t \ < \ +\infty.
\end{aligned}$$

Seule la partie réelle a donc une influence sur la convergence ! La dernière inégalité représente la condition de convergence. Les bornes (resp. une des bornes) de l'intégrale deviennent (resp. devient) des constantes (resp. une constante) lorsque le signal est borné sur un intervalle (resp. d'un coté).

Pour illustrer ce concept, on utilise la fonction échelon $\mathbb{I}(t)$. En effet, il est important de préciser la ROC quand on calcule la transformée de Laplace si l'on veut pouvoir réaliser l'opération inverse de manière univoque.

Pour $x(t) = \mathbb{I}(t)$,
la transformée de Laplace se calcule telle que :

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

La transformée de Laplace existe uniquement si $\Re(s) > 0$ pour garantir la présence d'une exponentielle décroissante.

En résumé,
$x(t) = \mathbb{I}(t) \rightarrow X(s) = \frac{1}{s}$,
ROC $= \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$.

Pour $x(t) = -\mathbb{I}(-t)$,
la transformée de Laplace se calcule telle que :

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -\mathbb{I}(-t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} (-1)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

La transformée de Laplace existe uniquement si $\Re(s) < 0$ pour garantir la présence d'une exponentielle décroissante.

En résumé,
$x(t) = -\mathbb{I}(-t) \rightarrow X(s) = \frac{1}{s}$,
ROC $= \{s \in \mathbb{C} : \sigma < 0\}$.

Dans beaucoup de situations, on peut facilement déduire la région de convergence :

1- Un signal de *durée finie*, *i.e.* il existe un intervalle $[T_1, T_2]$ contenant le support du signal $x(t)$, un intervalle de la droite réelle en dehors duquel le signal $x(\cdot)$ est identiquement nul. La condition d'existence de la transformée de Laplace devient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{T1}^{T_2} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

qui est borné (existe) pour toutes les valeurs du plan complexe :

$$\text{ROC } = \{s \in \mathbb{C}\}$$

2- Un signal de *support fini à gauche* (*i.e.* défini sur un intervalle ($[T_1, +\infty[$) et borné par $e^{\lambda_1 t}$:

$$|x(t)| \leq K_1 e^{\lambda_1 t} \text{ sur } [T_1, +\infty] \Rightarrow \mathcal{L}(s) \text{ existe si } \sigma > \lambda_1$$

car si on repart de la définition de la ROC :

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}\mathrm{d}t < +\infty$$
$$\int_{T_1}^{+\infty} K_1 e^{\lambda_1 t}e^{-\sigma t}\mathrm{d}t < +\infty.$$

Il faut que $\sigma - \lambda_1 > 0$, *i.e.* $\sigma > \lambda_1$ pour que la transformée de Laplace soit définie.

3- Un signal de *support fini à droite* (*i.e.* défini sur un intervalle ($]-\infty; T_2]$) et borné par $e^{\lambda_2 t}$:

$$|x(t)| \leq K_2 e^{\lambda_2 t} \text{ sur }]-\infty, T_2] \Rightarrow \mathcal{L}(s) \text{ existe si } \sigma < \lambda_2.$$

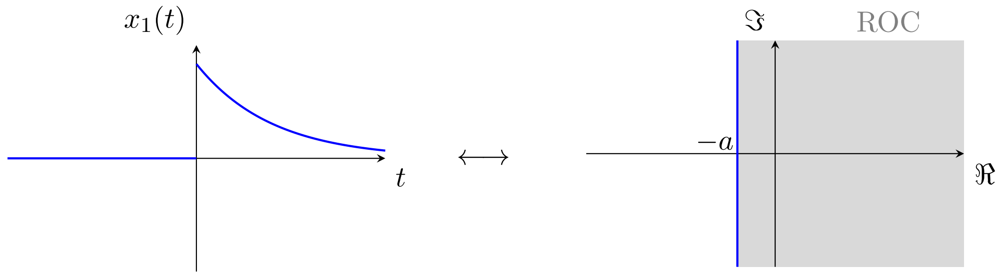
On peut reproduire la même étude que celle faite au point 2.

Exemples :

1- $x_1(t) = \mathbb{1}(t)e^{-at}\ ,\ a > 0 \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s) = \frac{1}{s+a}\ ,\ \Re(s) > -a$.
En effet, il suffit de repartir de la définition de la transformée de Laplace via l'intégrale :

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}(t)e^{-(a+s)t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+s)t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{a+s}\left[e^{-(a+s)t}\right]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$

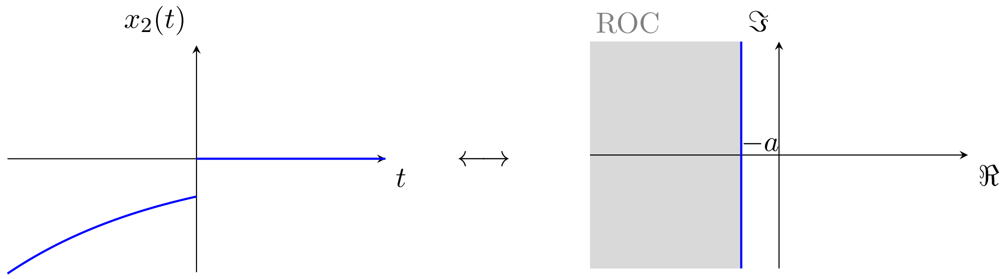
L'intégrale converge donc pour $\Re(a+s) > 0$ (car on impose la présence d'une exponentielle décroissante sur l'intervalle $t \geq 0$) $\Rightarrow \Re(s) > -a$ comme annoncé. La ROC est donc le demi-plan $\Re(s) > -a$.



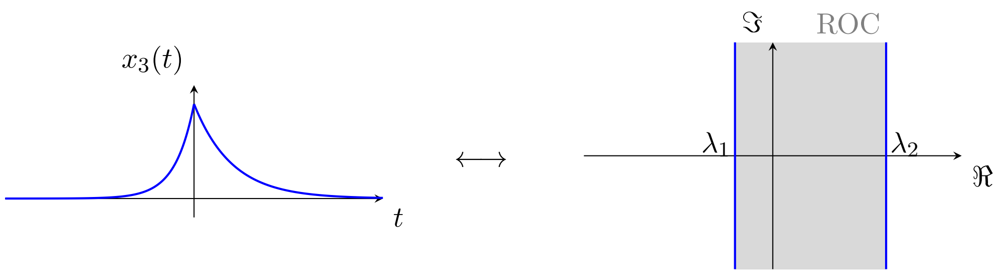
2- $x_2(t) = -\mathbb{1}(-t)e^{-at}\ ,\ a > 0 \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s) = \frac{1}{s+a}\ ,\ \Re(s) < -a$ En effet, il suffit de repartir de la définition de la transformée de Laplace via l'intégrale :

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\mathbb{1}(-t)e^{-(a+s)t}\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(a+s)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a+s}\left[e^{-(a+s)t}\right]_{-\infty}^{0} \end{aligned}$$

L'intégrale converge donc pour $\Re(a+s) < 0$ (car on impose la présence d'une exponentielle qui tend vers 0 sur $t \leq 0$) $\Rightarrow \Re(s) < -a$ comme annoncé. La ROC est donc le demi-plan $\Re(s) < -a$. On constate aussi qu'apparemment, les deux signaux possèdent les mêmes transformées mais ces dernières diffèrent par leur ROC.



3- $x_3(t) = \mathbb{1}(t)e^{\lambda_1 t} + \mathbb{1}(-t)e^{\lambda_2 t}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow$ ROC $= \{s \in \mathbb{C} : \sigma \in]\lambda_1; \lambda_2[\}$



Notation et relation avec la transformée de Fourier :
$\mathcal{L}(x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}e^{-\sigma t}\mathrm{d}t = \mathcal{F}(x(t)e^{-\sigma t})$ où $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{F}$) désigne la transformée de Laplace (resp. Fourier). On en déduit que $\mathcal{F}(x(t))$ existe si $X(s) = \mathcal{L}(x)(s)$ est telle que $\sigma = 0 \in \mathrm{ROC}_x$, *i.e.* la ROC_x inclut l'axe imaginaire $\Im$.

1.3 Propriétés

Les propriétés des transformées de Laplace sont répertoriées en Annexes. Ces propriétés sont à comprendre et à savoir utiliser, mais pas à mémoriser.

Voici un résumé des plus utilisées : R est la ROC initiale (avant transformation) et, après la virgule, on note la ROC associée au signal transformé.

Décalage temporel/fréquentiel

$$\begin{aligned}
t \mapsto x(t-t_0) \quad &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} s \mapsto e^{-st_0}X(s) \quad , \; R \\
t \mapsto e^{s_0 t}x(t) \quad &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} s \mapsto X(s-s_0) \quad , \; R - \Re(s_0)\,^{1} \\
t \mapsto e^{j\omega t}x(t) \quad &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} s \mapsto X(s-j\omega) \quad , \; R
\end{aligned}$$

Dualité multiplication/convolution

$$t \mapsto y(t) = (x_1 * x_2)(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s \mapsto Y(s) = X_1(s)X_2(s)$$

Différentiation et intégration

$$\begin{aligned}
t \mapsto \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \quad &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} s \mapsto sX(s) \\
t \mapsto \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \quad &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} s \mapsto \frac{1}{s}X(s) \\
t \mapsto -tx(t) \quad &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} s \mapsto \frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}
\end{aligned}$$

Notions clés

- Comprendre la différence entre série de Fourier, transformée de Fourier et transformée de Laplace.
- Maîtriser le concept d'intégrabilité qui apparaît avec la transformée de Laplace.
- Maîtriser le concept de la région de convergence.
- Calculer la région de convergence associée à une transformée.
- Savoir utiliser les propriétés pour déterminer la transformée de Laplace.

1. "Décalage" de la ROC de s_0 sur l'axe réel. De manière plus rigoureuse, $s \in R_{\text{signal transformé}}$ si $(s - s_0) \in R$.

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1 = Exercice 6.1 [TXB]

En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace, trouver la transformée des signaux suivants à partir de la transformée de $\mathbb{1}(t)$ et donner leur région de convergence.

a) $\delta(t)$
b) $\delta'(t)$ (dérivée de l'impulsion de Dirac)
c) $t\mathbb{1}(t)$
d) $e^{-at}\mathbb{1}(t)$
e) $te^{-at}\mathbb{1}(t)$
f) $\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)$
g) $e^{-at}\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)$

Schéma de résolution : transformée de Laplace à partir des propriétés

1- Identifier une fonction élémentaire dont la transformée de Laplace est donnée dans le tableau en Annexe. Ne pas oublier de préciser la ROC.

2- Identifier si la fonction élémentaire a subi une transformation ; dérivée, décalage temporel, ...

3- Utiliser les propriétés pour modifier la transformée de la fonction élémentaire sur base du tableau donné en Annexe.

4- Préciser la ROC de la transformée.

Exercice 2 = Exercice 6.7 [TXB]

En appliquant la définition, calculer la transformée de Laplace du signal suivant :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{si } t \in [0,T], \\ 0, & \text{si } t \notin [0,T]. \end{cases}$$

Schéma de résolution : calcul analytique de la transformée de Laplace

1- Formule de la transformée de Laplace

2- Remplacer $x(t)$ par son expression analytique et en précisant les bornes d'intégration.

3- Résoudre

Question supplémentaire : quelle est la ROC ?

3 Exercices à faire

Exercice 3 = Exercice 6.2 [TXB]

Calculer la transformée de Laplace du signal

$$x(t) = e^{-2t}\mathbb{1}(t) + e^{-t}\cos(3t)\mathbb{1}(t).$$

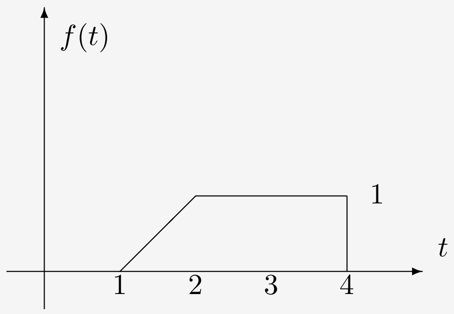
et déterminer la région de convergence.

Schéma de résolution : transformée de Laplace à partir des propriétés
Utiliser le même raisonnement que pour l'exercice 1 :

1- Signal élémentaire
2- Propriétés/transformations affectant le signal élémentaire
3- Calcul/résolution
4- Identification de la ROC

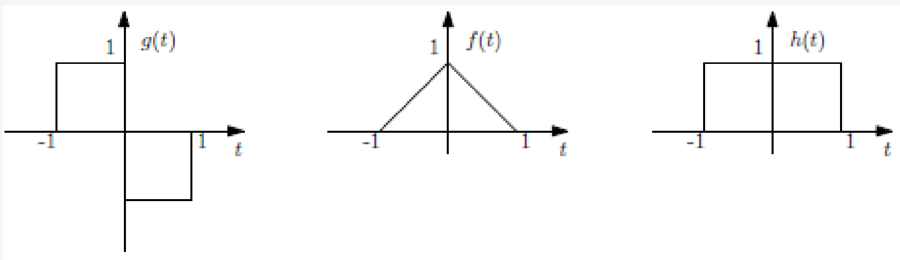
Exercice 4 = Exercice 6.4 [TXB]

Calculer la transformée de Laplace du signal représenté ci-dessous et déterminer la région de convergence.



4 Pour s'exercer

Exercice 5 = Janvier 2019 - Q3 [Online]
En reprenant l'exercice 5 du TP6 :



(a) Calculer la transformée de Laplace de $g(t)$
(b) Déduire la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ en se basant sur $g(t)$ et la relation obtenue précédemment. (ne pas calculer d'intégrale !)
(c) Calculer le produit de convolution de $f(t)$ et $h(t)$ à l'aide des transformées de Laplace.

Exercice 6
Regardez la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=ZGPtPkTft8g`

5 Sources supplémentaires

Vous trouverez des informations plus détaillées sur les démonstrations des propriétés des transformées ou la définition de la région de convergence **chapitre 6** [TXB-théorie] :

- section 6.5 : région de convergence
- section 6.7 : dualité produit-convolution

Voici également quelques liens intéressants sur les transformées de Laplace :
`https://www.youtube.com/watch?v=ZGPtPkTft8g`
`http://www.sharetechnote.com/html/EngMath_LaplaceTransform.html`
`http://fourier.eng.hmc.edu/e102/lectures/Laplace_Transform/node1.html`

TP9

Exercice 1 = Exercice 6.1 [TXB]
La transformée de Laplace de $x(t) = \mathbb{1}(t)$ est donnée par $X(s) = \mathcal{L}(\mathbb{1}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}(t)e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > 0\}$

a) Version courte : $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C}\}$ (application directe des tables des transformées de Laplace bilatérale)

Version longue : On a $\delta(t) = \frac{d\mathbb{1}(t)}{dt}$. Ainsi, par la propriété de dérivation temporelle, on obtient $\mathcal{L}(\delta(t)) = s\mathcal{L}(\mathbb{1}(t)) = 1$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C}\}$

b) Avec la propriété de dérivation temporelle, on a $\mathcal{L}(\delta'(t)) = s\mathcal{L}(\delta(t)) = s$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C}\}$

c) Version courte : $\mathcal{L}\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{1}(t)\right)$ avec $n = 2$. Par application directe des tables des transformées de Laplace : $\mathcal{L}\left(t\mathbb{1}(t)\right) = \frac{1}{s^2}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > 0\}$

Version longue : on a $\mathcal{L}(t\mathbb{1}(t)) = -\mathcal{L}(-t\mathbb{1}(t))$. On remarque qu'il s'agit de la propriété de dérivation fréquentielle (même principe que la dérivation temporelle mais appliqué à l'autre domaine). Ainsi, $-\mathcal{L}(-t\mathbb{1}(t)) = -\frac{d(1/s)}{ds} = \frac{1}{s^2}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > 0\}$

d) Version courte (application directe des tables) : $\mathcal{L}(e^{-at}\mathbb{1}(t)) = \frac{1}{s+a}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > -a\}$

Version longue : $\mathcal{L}(e^{-at}\mathbb{1}(t)) = \mathcal{L}(e^{s_0 t}\mathbb{1}(t))\Big|_{s_0=-a}$. On remarque la propriété de décalage fréquentiel. Ainsi, $\mathcal{L}(e^{s_0 t}\mathbb{1}(t)) = \mathcal{L}(\mathbb{1}(t))\Big|_{s-s_0} = \frac{1}{s-s_0} = \frac{1}{s+a}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > -a\}$

e) On a $\mathcal{L}(te^{-at}\mathbb{1}(t)) = -\mathcal{L}(-te^{-at}\mathbb{1}(t)) = -\frac{d(\mathcal{L}\left((e^{-st}\mathbb{1}(t)\right))}{ds}\Big|_{s=a} = -\left(\frac{1}{s+a}\right)' = \frac{1}{(s+a)^2}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > -a\}$

f) Version courte (application directe des tables) : $\mathcal{L}(\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > 0\}$

Version longue : on a $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$. Ainsi, $\mathcal{L}(\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{j\omega_0 t}\mathbb{1}(t)) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-j\omega_0 t}\mathbb{1}(t))$. On remarque à nouveau la propriété de décalage fréquentiel. On obtient alors

$$\mathcal{L}(\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\mathbb{1}(t))\Big|_{s-j\omega_0} + \frac{1}{2}\mathcal{L}(\mathbb{1}(t))\Big|_{s+j\omega_0} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right] = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > 0\}$

g) On a $e^{-at}\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t) = \left(\frac{e^{(-a+j\omega_0)t}+e^{-(a+j\omega_0)t}}{2}\right)\mathbb{1}(t)$. Résolution similaire à f) :

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t)\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-(-a+j\omega_0)} + \frac{1}{s+(a+j\omega_0)}\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > -a\}$

Exercice 2 = Exercice 6.7 [TXB]
$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\, dt = \int_0^T e^{-(s+1)t}\, dt = \begin{cases} T, & \text{si } s = -1, \\ \frac{1-e^{-(s+1)T}}{s+1}, & \text{sinon,} \end{cases}$ avec ROC $= \mathbb{C}$ (signal de durée finie)

Exercice 3 = Exercice 6.2 [TXB]
Sur base de l'exercice 1d) : $\mathcal{L}(e^{-2t}\mathbb{I}(t)) = \frac{1}{s+2}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > -2\}$
Sur base de l'exercice 1g) : $\mathcal{L}\left(e^{-t}\cos(3t)\mathbb{I}(t)\right) = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > -1\}$
Par linéarité, on a donc :

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+9} = \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}$$

avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > -1\}$ (garder la condition la pus contraignante)

Exercice 4 = Exercice 6.4 [TXB]
Le signal $x(t)$ est donné par

$$f(t) = \begin{cases} t-1, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 4 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(s) = \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_1^2 (t-1)e^{-st}\,dt + \int_2^4 e^{-st}\,dt = \underbrace{\displaystyle\int_1^2 te^{-st}\,dt}_{\bigstar} - \textstyle\int_1^2 e^{-st}\,dt + \underbrace{\displaystyle\int_2^4 e^{-st}\,dt}_{\blacksquare}$$

Pour $\blacksquare$:

- si $s = 0$: $\blacksquare = 4 - 2 = 2$
- si $s \neq 0$: $\blacksquare = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_2^4 = -\frac{e^{-4s}-e^{-2s}}{s}$

Pour $\bigstar$:

- si $s = 0$: $\bigstar = \frac{2^2-1^2}{2} = \frac{3}{2}$
- si $s \neq 0$: $\bigstar = -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_a^b + \frac{1}{s}\int_a^b e^{-st}\,dt = -\frac{(2e^{-2s}-e^{-s})}{s} - \frac{(e^{-2s}-e^{-s})}{s^2}$

Ainsi,
si $s = 0$: $F(s) = 2 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{2}$
si $s \neq 0$: $F(s) = -\frac{e^{-4s}-e^{-2s}}{s} - \frac{(2e^{-2s}-e^{-s})}{s} - \frac{(e^{-2s}-e^{-s})}{s^2} + \frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s} = \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} \neq 0\}$
Au final,

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

avec $ROC = \{s \in \mathbb{C}\}$ (car en appliquant 2 fois le théorème de l'Hospital à $F(s)$ au voisinage de 0, on retrouve $F(0) = \frac{5}{2}$).

Exercice 5 = Janvier 2019 - Q3 [Online]
(a) La transformée de Laplace de $g(t)$ peut s'obtenir soit par la résolution de l'intégrale, soit en écrivant $g(t)$ à l'aide de $\mathbb{I}(t)$ et en utilisant les propriétés de linéarité et de décalage temporel. Version intégrale :

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-st}\,dt = \int_{-1}^{0} e^{-st}\,dt - \int_0^1 e^{-st}\,dt = \frac{e^s}{s} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{2}{s}$$

avec $ROC = \{s \in \mathbb{C}\}$ (car signal de durée finie)

(b) On sait que $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$. Ainsi, en appliquant la propriété de dérivation temporelle, on obtient pour les transformées de Laplace correspondante : $G(s) = sF(s)$. On en déduit alors la transformée de Laplace de $f(t)$:

$$F(s) = \frac{e^s}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2}{s^2}$$

avec $ROC = \{s \in \mathbb{C}\}$ (car signal de durée finie)

(c) On a $y(t) = f(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = F(s).H(s)$

La transformée de Laplace de $h(t)$ est alors donnée par $\mathcal{L}(\mathbb{I}(t+1)) - \mathcal{L}(\mathbb{I}(t-1)) = \frac{e^s}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$

$$Y(s) = F(s)H(s) = \frac{e^{2s}}{s^3} - \frac{e^{-2s}}{s^3} - 2\frac{e^s}{s^3} + 2\frac{e^{-s}}{s^3}$$

pour réobtenir $y(t)$, on utilise la propriété $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{I}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^n}$ (avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > 0\}$) et la propriété de décalage temporel $\left(\mathbb{I}(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0}\frac{1}{s} \text{ avec } ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > 0\}\right)$

Exemple avec $\frac{e^{2s}}{s^3}$:

$$x(t) = \frac{t^{3-1}}{(3-1)!}\mathbb{I}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^3} \leftrightarrow x(t+2) = \frac{(t+2)^{3-1}}{(3-1)!}\mathbb{I}(t+2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(x(t+2)) = e^{2s}\mathcal{L}(x(t)) = \frac{e^{2s}}{s^3}$$

Ainsi, on obtient

$$y(t) = \frac{(t+2)^2}{2}\mathbb{I}(t+2) - \frac{(t-2)^2}{2}\mathbb{I}(t-2) - (t+1)^2\mathbb{I}(t+1) + (t-1)^2\mathbb{I}(t-1)$$

avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > 0\}$