TP8 : Transformée de Fourier

1 Concept

1.1 Point de vue mathématique

La *décomposition en série de Fourier* du signal $x(t)$ *périodique* (de période T) permet de représenter le signal périodique autrement que selon sa représentation habituelle avec le temps en abscisse. En effet, grâce aux coefficients de Fourier, on peut représenter le signal selon l'amplitude des différentes harmoniques et les déphasages (voir TP précédent). On travaille donc dans le domaine *fréquentiel* au lieu du domaine *temporel*.

Cependant, que faire si le signal n'est pas périodique ?
Si un signal n'est pas périodique, on peut utiliser une ruse mathématique en écrivant que la période du signal apériodique tend vers l'infini ("$T \to \infty$").

Cette astuce va permettre de démontrer le passage de la décomposition en série de Fourier à la transformée de Fourier.
Pour rappel, les formules obtenues pour les séries de Fourier sont (dans le cas où ce sont les coefficients qui sont normalisés et non la série - voir TP précédent pour plus de détails) :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} \hat{x}_k e^{jk\omega t}$$
$$\hat{x}_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega t} \mathrm{d}t, \ k \in \mathcal{Z}.$$

La première équation peut se réécrire en multipliant et en divisant par T :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T \hat{x}_k \frac{1}{T} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}.$$

On pose

$$\Delta l = \frac{1}{T} \ , \ l_n = \frac{k}{T} \ , \ \hat{x}_l = T\hat{x}_k.$$

La série de Fourier et les coefficients de Fourier se notent alors

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{x}_l e^{j2\pi l_n t} \Delta l$$
$$\hat{x}_l = T\hat{x}_k = \int_T x(t) e^{-j2\pi l_n t} \mathrm{d}t.$$

Pour $T \to \infty$ (*i.e.* on considère un signal *apériodique*),

$$\Delta l \to \mathrm{d}l \quad \text{(infinitésimal)}$$
$$l_n \to l \quad \text{(la somme sur } k \text{ est effectuée pour chaque "petite parcelle" notée } l_n)$$
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \to \int_{-\infty}^{+\infty}$$
$$\int_T \to \int_{-\infty}^{+\infty}$$

Ceci étant valable si l'expression est bien *intégrable* (cette condition prend tout son sens dans le prochain TP).

Les formules deviennent donc

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_l e^{j2\pi lt} \mathrm{d}l,$$
$$\hat{x}_l = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi lt} \mathrm{d}t.$$

Attention que la première intégrale est par rapport à l et la deuxième par rapport à t ! Ces deux formules cachent en réalité celles de la transformée de Fourier. En effet, en notant que $l = f$, on met bien en évidence la fréquence

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} \mathrm{d}f,$$
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}t,$$

où $X(f)$ désigne la transformée de Fourier de $x(t)$ évaluée à la fréquence f.
On peut finalement faire intervenir la pulsation $\omega = 2\pi f$ et on obtient l'expression caractérisant la transformée de Fourier et la transformée inverse de Fourier :

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega}$$

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t}$$

Remarque ♡ : La *série* de Fourier est représentée à l'aide de son spectre fréquentiel *discret* caractérisé par des raies à chaque multiple de la fréquence fondamentale ($f_0 = 1/T$) du signal périodique de période T. Cela se voyait mathématiquement par la somme sur des valeurs de k discrètes indiquant la présence d'harmoniques. Or, pour la *transformée* de Fourier, la somme discrète a fait place à une intégrale. Le spectre fréquentiel est donc *continu*.

1.2 Point de vue pratique

La transformée de Fourier est donc un outil pour passer du domaine temporel au domaine fréquentiel. Un même signal peut donc être représenté dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel, et on utilise la transformée pour faire le lien entre ces deux domaines. Notons que, quand on parle de domaine, on pourrait faire l'analogie entre donner l'adresse d'une maison (Allée de la découverte, 10, 4000 Liège) ou donner ses coordonnées GPS (50.6, 5.6). Les deux notations correspondent à l'institut Montefiore mais sont exprimées différemment.

Notions clés

- Comprendre la différence entre série et transformée de Fourier
- Pouvoir retrouver la formule de la transformée (développement présenté dans ce rappel)
- Comprendre que la formule $X(j\omega)$ donne le spectre fréquentiel d'un signal
- Savoir calculer la transformée de Fourier des différents signaux de base et utiliser la définition mathématique

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1

Calculer de manière analytique la transformée de Fourier de $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Schéma de résolution : transformée de Fourier

0- Dessiner le signal $x(t)$

1- Formule

2- Remplacer $x(t)$ par son expression analytique et en précisant les bornes d'intégration.

3- Résoudre :

$$x(t) \rightarrow X(f) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T)$$

En utilisant, la fonction $sinc(\cdot)$ définie par :

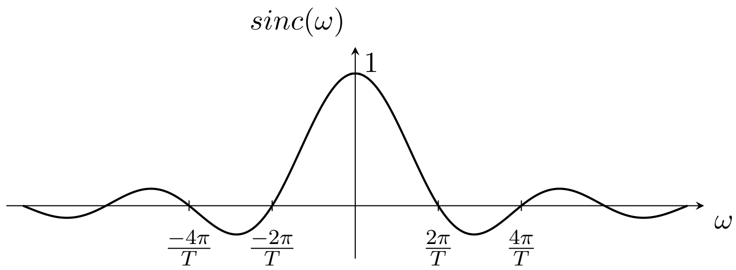
$$sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

on obtient :

$$X(f) = AT sinc(fT)$$

La fonction $sinc(x)$ ($\heartsuit$) a une propriété intéressante telle qu'en $x = 0$, on peut écrire grâce au théorème de l'Hospital :

$$sinc(0) = \frac{\sin(\pi 0)}{\pi 0} = 1$$



Exercice 2

(a) Tracer la transformée de Fourier $X(j\omega)$ (sugg : sur Matlab ou Python) de l'exercice n° 1 pour $A = 1$ et les différentes valeurs de T suivantes :
- cas 1 : T=10,
- cas 2 : T=1,

(b) Déduire la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac.

Exercice 3

(a) Calculer de manière analytique la transformée de Fourier de $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0, T], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Tracer la transformée de Fourier $X(j\omega)$ pour $T = 10$ et $A = 1$.
(c) Comparer avec les réponses obtenues à l'exercice n° 1.

Schéma de résolution : transformée de Fourier

0- Dessiner le signal $x(t)$

1- Formule

2- Remplacer $x(t)$ par son expression analytique et en précisant les bornes d'intégration.

3- Résoudre.

Exercice 4

(a) Calculer de manière analytique la transformée de Fourier de $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.
(b) Dessiner la transformée de Fourier $X(j\omega)$ en amplitude et en phase.
(c) Comparer le domaine couvert par la transformée de Fourier de cette fonction trigonométrique et le domaine couvert par la transformée de Fourier de la fonction carrée de l'exercice 1.

3 Exercices à faire

Exercice 5

(a) Calculer de manière analytique la transformée de Fourier de :

$$x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & \text{si } t \in [-T/2, T/2], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $T = 20$ et $\omega_0 = 1$.
(b) Tracer la transformée de Fourier obtenue de manière analytique sur Matlab/avec Python.
((c) Tracer la `fft` de la transformée sur Matlab.)
(d) Exprimer $x(t)$ comme étant un produit de deux fonctions.
(e) Déduire comment un produit de deux fonctions dans le domaine temporel est calculé dans lorsque l'on exprime ces fonctions à l'aide de leur transformée de Fourier.
(f) Changer T et décrire comment le spectre fréquentiel évolue.

Exercice 6

(a) Calculer analytiquement la transformée de Fourier de $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.
(b) Dessiner la transformée de Fourier en amplitude et en phase.

4 Pour s'exercer

Exercice 7 = Exercice 9.1 (a) [TXB]

Établir la transformée de Fourier du signal suivant :

$$x_1(t) = e^{-a|t|}\,, a > 0$$

Exercice 8

(a) Calculer analytiquement la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac.
(b) Dessiner la transformée de Fourier en amplitude et en phase.

Exercice 9 = Exercice 9.2 [TXB]

Choisir la bonne réponse : la transformée de Fourier de $x(t) = e^{2t}\,\mathbb{1}(t)$

(i) n'existe pas.

(ii) vaut $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega-2}$.

(iii) vaut $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2}$.

5 Sources supplémentaires

https://www.princeton.edu/~cuff/ele301/files/lecture7_2.pdf
https://web.stanford.edu/class/ee102/lectures/fourtran
https://www.youtube.com/watch?v=1JnayXHhjlg&t=405s
https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY
https://www.youtube.com/watch?v=IgF3OX8nT0w

TP8

Exercice 1
On a

$$x(t) = \begin{cases} A, & \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier est donnée par $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$. On a donc

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\, e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{A}{j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{j\omega\frac{T}{2}}\right) = \frac{2A}{\omega}\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right) = \underbrace{\frac{A}{\pi f}\sin(\pi f T)}_{X(f)}$$

Exprimé à l'aide de la fonction $sinc(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$:

$$X(j\omega) = \frac{AT}{\pi\frac{\omega T}{2\pi}}\sin\left(\pi\frac{\omega T}{2\pi}\right) = AT sinc\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right); \qquad X(f) = AT sinc(fT)$$

Exercice 2
(a) Voir Figure

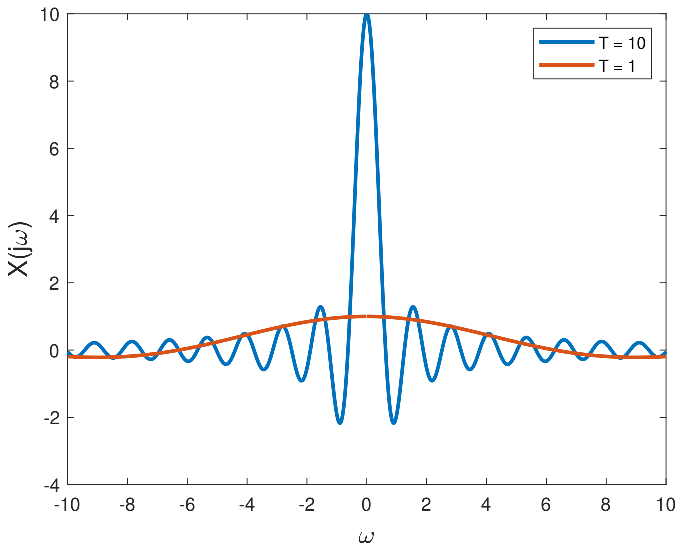


Figure 1 – Transformée de Fourier du signal $x(t) = \begin{cases} A, & \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ avec $A = 1$

(b) La transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac correspond au cas extrême où $T \to 0$ et $A \to \infty$, tel que $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$, où $\mathcal{F}\{f(t)\}$ dénote la transformée de Fourier du signal temporel $f(t)$.

Exercice 3
Version 1 : Résolution par application stricte de la formule de la transformée de Fourier ($X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$) puis artifice (i.e. $T = \frac{T}{2} + \frac{T}{2}$ et $0 = \frac{T}{2} - \frac{T}{2}$) pour revenir au $sinc(x)$ (version laissée comme exercice à l'étudiant.e).

Version 2 : Remarquer que $x_{ex3}(t) = x_{ex1}(t - \frac{T}{2})$ (i.e. le signal de l'ex 1 est **décalé** de $\frac{T}{2}$) et utiliser les propriétés des transformées de Fourier ($x(t - t_0) \to e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$). On a alors

$$X_{ex3}(j\omega) = e^{-j\omega\frac{T}{2}} X_{ex1}(j\omega) = \frac{2A}{\omega} e^{-j\omega\frac{T}{2}} \sin\left(\omega\frac{T}{2}\right) = ATe^{-j\omega\frac{T}{2}} sinc\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

De manière similaire :

$$X_{ex3}(f) = \frac{A}{\pi f} e^{-j\pi f T} \sin(\pi f T) = ATe^{-j\pi f T} sinc(fT)$$

Exercice 4
En appliquant la formule de la transformée de Fourier :

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_0-\omega)t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega_0+\omega)t} dt$$

On se rend compte que le développement ne mène à rien, pas moyen de trouver une solution. Il faut donc trouver une alternative. En se rappelant que $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ et que $\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}$ (propriété du décalage temporel), analysons ce qu'un décalage **fréquentiel** provoque, i.e. calculons $\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega-\omega_0)\}$:

$$x_{freq.delay}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega-\omega_0)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0) e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

On observe qu'un décalage fréquentiel donne une exponentielle de fréquence angulaire ω_0 en temporel. Il s'agit de la propriété de décalage fréquentiel.
Ainsi, on a

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\} = \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

(b) Le spectre fréquentiel est donc discret. Pour l'amplitude, seules les valeurs en $\pm\omega_0$ sont non nulles et valent π. Pour la phase, il n'y a aucun déphasage causé par $\cos(\omega_0 t)$ donc toutes les valeurs sont nulles.

(c) Le spectre fréquentiel de $\cos(\omega_0 t)$ couvre seulement 2 fréquences (i.e. $\pm\omega_0$) car $\cos(\omega_0 t)$ est en réalité une fonction périodique ce qui cause son spectre fréquentiel à être discret ! A contrario, la fonction carrée de l'exercice 1 est non périodique ce qui cause son spectre fréquentiel à être continu et couvre donc le continuum de fréquence ω.

Exercice 5
(a)

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\; e^{-j\omega t}\; dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) e^{-j\omega t}\; dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[e^{jt(\omega_0-\omega)} + e^{-jt(\omega_0+\omega)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j\frac{T}{2}(\omega_0-\omega)} - e^{-j\frac{T}{2}(\omega_0-\omega)}}{j(\omega_0-\omega)} + \frac{e^{-j\frac{T}{2}(\omega_0+\omega)} - e^{j\frac{T}{2}(\omega_0+\omega)}}{-j(\omega_0+\omega)}\right] \\
&= \frac{1}{\omega_0-\omega}\sin\left((\omega_0-\omega)\frac{T}{2}\right) + \frac{1}{\omega_0+\omega}\sin\left((\omega_0+\omega)\frac{T}{2}\right) \\
&= \frac{T/2}{(\omega_0-\omega)T/2}\sin\left((\omega_0-\omega)\frac{T}{2}\right) + \frac{T/2}{(\omega_0+\omega)T/2}\sin\left((\omega_0+\omega)\frac{T}{2}\right) \\
&= \frac{T}{2} sinc\left[(\omega_0-\omega)\frac{T}{2\pi}\right] + \frac{T}{2} sinc\left[(\omega_0+\omega)\frac{T}{2\pi}\right]
\end{aligned}$$

(b) 2 *sinc* placés en $\pm\omega_0$
((c) voir Matlab)
(d) $x(t) = f(t)g(t)$ où $f(t) = \cos(t)$ (Voir Ex 4 avec $\omega_0 = 1$: $\mathcal{F}(f(t)) = \pi(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))$) et g(t) = 1 si $|t| \leq T/2$ (Voir Ex 1 avec $A = 1$: $\mathcal{F}(g(t)) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$).
(e) $\mathcal{F}(x(t)) = X(j\omega) = \mathcal{F}(f(t)) * \mathcal{F}(g(t))$ (il suffit de convoluer les deux transformées $\rightarrow$ un produit de deux fonctions dans le domaine temporel devient une convolution dans le domaine fréquentiel et vice-versa.)
(f) Si T augmente (resp. diminue), le spectre devient discret (resp. continu).

Exercice 6
(a) On a $x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$. En utilisant la propriété de décalage **fréquentiel**, *i.e.* $\mathcal{F}(\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}) = \delta(\omega - \omega_0)$, on obtient

$$X(j\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}\right) = -\pi j[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

(b) Deux manières d'afficher la transformée de Fourier : soit un seul diagramme avec en abscisse la pulsation et en ordonnée l'entièreté de la transformée de Fourier $X(j\omega)$. En $\omega = \omega_0$ (resp. $\omega = -\omega_0$), vous dessinez une impulsion de Dirac donc la "hauteur" est de $-j\pi$ (resp. $j\pi$). Cette manière de dessiner la transformée de Fourier du sinus est fréquent dans la littérature. Soit, pour être plus précis, vous pouvez dessiner le diagramme en amplitude et en phase. Le diagramme en amplitude correspond à deux pics de valeur π en $\pm\omega_0$. Le diagramme de phase correspond à deux barres : en ω_0 (resp. $-\omega_0$), la phase vaut $-\pi/2$ (resp. $\pi/2$).

Exercice 7 = Exercice 9.1 (a) [TXB]
Le signal est donné par $x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$, ce qui équivaut à

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j\omega t}\ dt &= \int_{-\infty}^{0} e^{at}\ e^{-j\omega t}\ dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\ e^{-j\omega t}\ dt \\ &= \left.\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a - j\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_{0}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Exercice 8
(a) $X(j\omega) = \mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j\omega t}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\ e^{-j\omega t}\ dt = e^{-j\omega \cdot 0} = 1$

(b) Son diagramme d'amplitude correspond à une "hauteur" constante unitaire pour toute fréquence ω. Son diagramme de phase vaut 0 partout (pour toute fréquence ω).

Exercice 9 = Exercice 9.2 [TXB]
La transformée de Fourier de $x(t)$ n'existe pas (car $x(t)$ ne converge pas à l'infini et/ou la ROC ne comprend pas l'axe imaginaire, voir TP transformée de Laplace).