TP7 : Séries de Fourier

1 Concept

1.1 Rappels : nombres complexes

Un nombre complexe z peut s'écrire sous deux formes :
- partie réelle a et partie imaginaire b telles que : $z = \Re(z) + j\Im(z) = a + jb$
- module (amplitude) $|Z|$ et argument (phase) $\angle Z$: $z = |Z|e^{j\angle Z}$,
où j représente le nombre imaginaire tel que $j = \sqrt{-1}$.

Le passage de l'un à l'autre s'obtient via les formules suivantes :

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

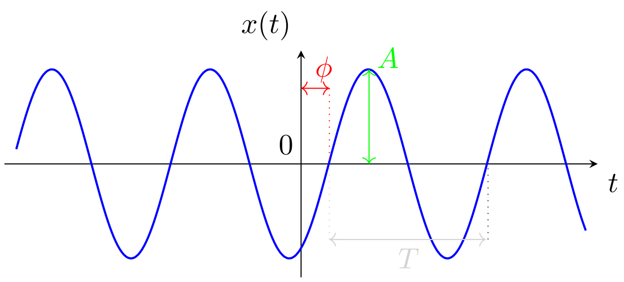
et

$$\angle Z = \tan^{-1}(\frac{b}{a}).$$

On a également que $z = |Z|e^{j\angle Z} = |Z|\cos(\angle Z) + j|Z|\sin(\angle Z)$ et $a = |Z|\cos(\angle Z)$ et $b = |Z|\sin(\angle Z)$ (en faisant attention d'être dans le bon quadrant du cercle trigonométrique).

1.2 Rappels : fonctions trigonométriques

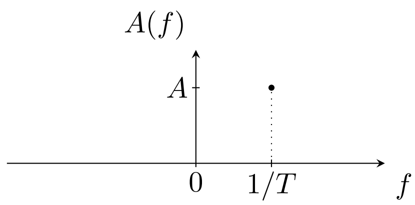
Rappel : un signal continu est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ si $x(t) = x(t + T)$, $\forall t$.
Représentation habituelle $\rightarrow$ évolution temporelle $x(t)$:

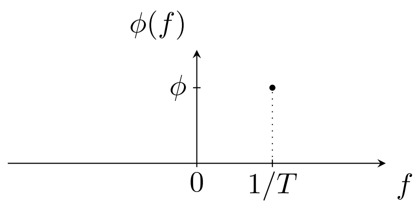


Equation : $x(t) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t + \phi)$
Cette équation peut être caractérisée par 3 composantes :

- son amplitude : A
- sa période : T
- sa phase : ϕ

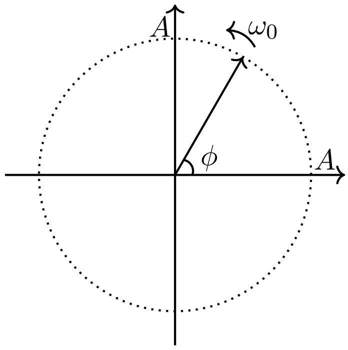
On se rend compte qu'il existe d'autres manières pour représenter ce triplet d'information. En effet, on peut caractériser ces différentes composantes à l'aide de deux graphiques, celui de l'amplitude (à gauche) et celui de la phase (à droite), variables représentées en fonction de la fréquence :





Cette représentation peut servir à représenter plusieurs sinus simultanément, par leurs fréquences, amplitudes et phases respectives sans devoir dessiner leur évolution temporelle.

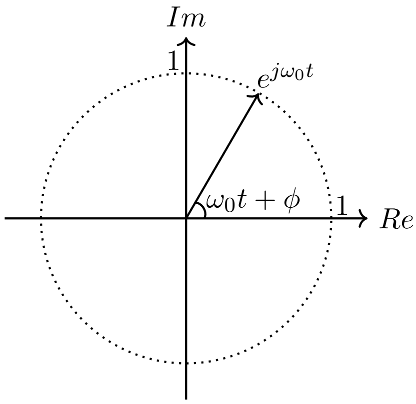
On peut aussi représenter deux de ces trois composantes par un *vecteur* du plan, de longueur A et dont l'angle qu'il forme avec l'axe des abscisses est ϕ, en $t = 0$. Si, en plus, ce vecteur se met à tourner autour de son origine à une vitesse $\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, de manière à ce qu'il mette T secondes pour faire un tour complet, alors les trois informations sont représentées.



Sur base de l'idée développée dans cette dernière représentation, on peut introduire l'*exponentielle complexe*. Il s'agit en quelque sorte de la représentation polaire des nombres complexes.
On note $e^{j\omega_0 t}$ le vecteur de longueur unitaire (ou plutôt le point à l'extrémité de ce vecteur) et tournant à vitesse ω_0 (positive s'il tourne dans le sens trigonométrique, négative sinon), et où j est le nombre imaginaire. Pour rappel, on a

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t).$$

Ainsi, projeté sur l'axe réel, ce point tournant décrit un cosinus, et sur l'axe imaginaire, un sinus. [1] De même, on peut écrire $e^{j(\omega_0 t+\phi)}$ pour tenir compte du déphasage en $t = 0$.



Les fonctions trigonométriques peuvent également s'exprimer sous la forme d'exponentielles complexes en utilisant les relations d'Euler :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}t} + e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t}}{2j}$$

Ainsi, le signal $x(t)$ décrit précédemment devient :

$$x(t) = A\sin(\frac{2\pi}{T} + \phi) = A\,\Im\left\{e^{\left(j\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)\right)}\right\}.$$

1. Voir la section "Sources complémentaires" pour des illustrations et des vidéos.

1.3 Exemple introductif

Pour introduire le concept de série de Fourier, on va s'intéresser aux sons de différents instruments de musique.
Prenons un son pur de fréquence fondamentale de 440 [Hz] (La). Ce son correspond à une variation de pression suivant une simple sinusoïde $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ avec $T = 1/f = 1/440$.
Pourtant, si l'on joue un La avec différents instruments, on entend un son différent. Pourquoi ?

La différence vient des combinaisons d'harmoniques propres à chaque instrument (quelles harmoniques sont présentes dans l'instrument et en quelle quantité). Pour rappel, une *harmonique* se définit par une fréquence multiple de la fréquence fondamentale. Dans notre exemple, la fréquence fondamentale du La est de 440 [Hz]. La deuxième harmonique est alors de fréquence 880 [Hz], la troisième 1320 [Hz] et ainsi de suite. Si f_0 désigne la fréquence fondamentale, on dira alors que la $k^{ème}$ harmonique est de fréquence kf_0.

Si l'on mesure la pression de l'air près d'une flûte et d'un violon jouant un La avec une même amplitude sonore, on observera [2] quelque chose de similaire à la Figure 1.

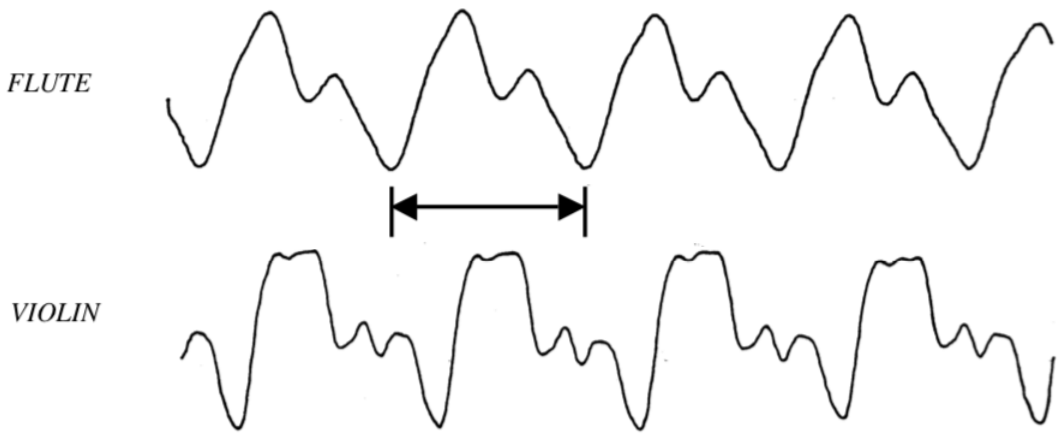


Figure 1 – Variation de la pression au cours du temps pour une flûte et un violon

Ces graphiques, bien que périodiques, n'ont plus du tout l'allure d'une simple sinusoïde ! En effet, la simple sinusoïde de fréquence 440 [Hz] est modifiée par la présence de sinusoïdes de fréquences multiples de 440 [Hz], de sorte que le son perçu est en fait la somme de tous ces sinus (et, plus généralement, d'exponentielles complexes). On peut donc écrire une équation générale pour le son perçu de la forme :

$$x(t) = A_0 + A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_1\right) + A_2 \sin\left(2\frac{2\pi}{T}t + \phi_2\right) + A_3 \sin\left(3\frac{2\pi}{T}t + \phi_3\right) + ...$$

On peut donc visualiser la variation de pression de la flûte au cours du temps comme une somme de deux sinus (possédant leur propre fréquence et leur propre amplitude) comme illustrée à la Figure 2. Comme illustré dans le rappel, cette équation peut aussi être étudiée à l'aide de deux graphiques montrant l'amplitude et le déphasage associés à chaque fréquence.

Ces graphiques (Figure 3) sont parfois appelés *spectre fréquentiel* d'un signal : il s'agit d'une fonction qui, pour chaque fréquence, donne son importance dans le signal en question. Dans ce TP, lorsque le signal est périodique, on aura uniquement des spectres fréquentiels discrets car uniquement les fréquences multiples de la fréquence fondamentale sont présentes. On trace donc un trait vertical d'amplitude A_k à l'harmonique k. Ces graphiques montrent donc l'importance que chaque instrument accorde aux différentes harmoniques.

2. http://amath.colorado.edu/pub/matlab/music/MathMusic.pdf

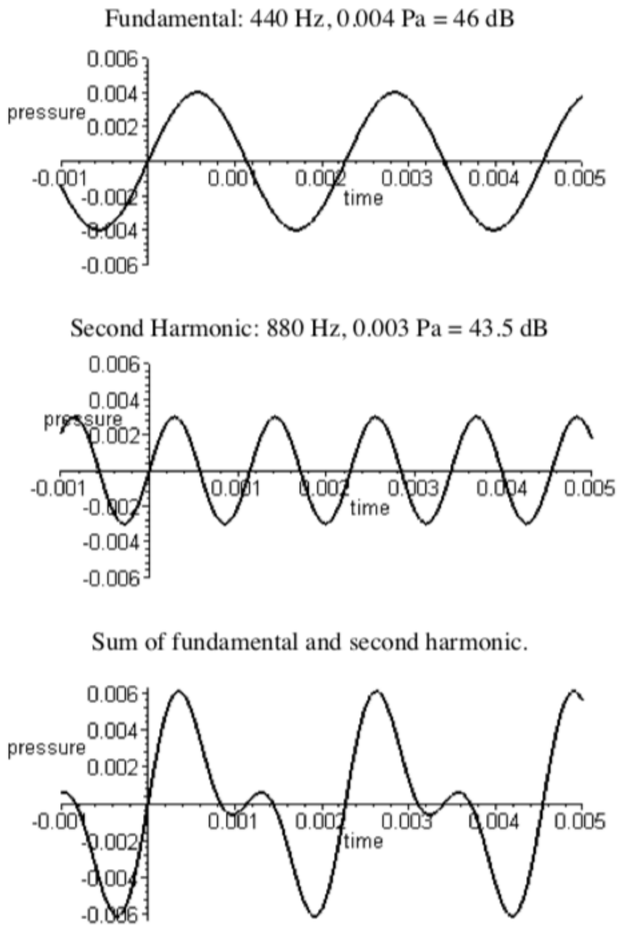


FIGURE 2 – Somme de la première et de la deuxième harmonique dans la flûte

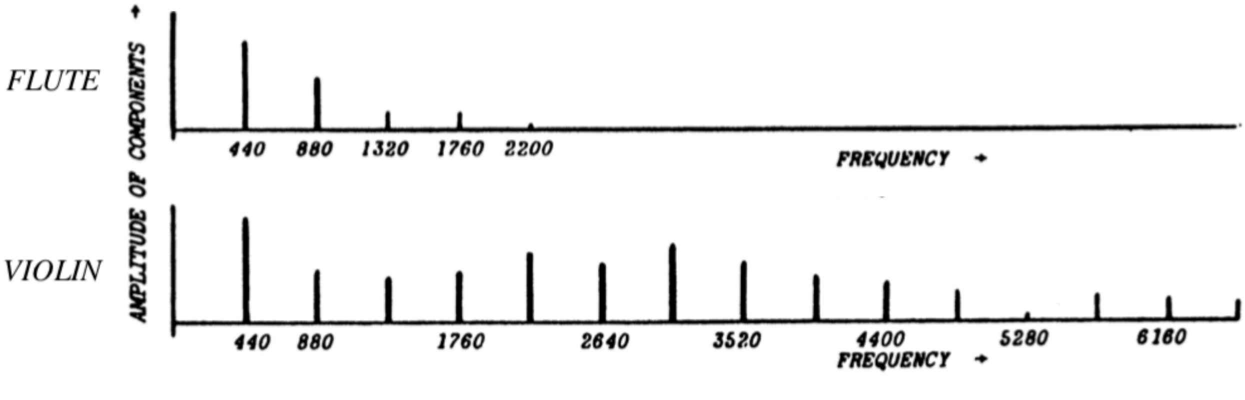


FIGURE 3 – Amplitude des harmoniques de la flûte et du violon

1.4 Introduction aux séries de Fourier

Il existe un outil *mathématique* qui permet de décomposer un signal **périodique** en ses différentes amplitudes et phases à chaque harmonique. Cet outil s'appelle la **décomposition en série de Fourier**. Il s'agit du premier outil que nous voyons dans ce cours pour passer du **domaine temporel** au **domaine fréquentiel**.

♡ En effet, Fourier a démontré que, mathématiquement, tout signal périodique de période T (et donc de fréquence $f = 1/T$) peut être exprimé comme une somme pondérée de signaux harmoniques de fréquences multiples de $1/T$. En utilisant le formalisme de l'exponentielle complexe, cette somme s'écrit

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathcal{Z}} \hat{x}_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}}$$

où T correspond à la période du signal $x(t)$ et $\hat{x}_k$ correspond au *coefficient de Fourier* associé à l'harmonique k.
Ce coefficient de Fourier est obtenu à l'aide de la formule :

$$\boxed{\hat{x}_k = \int_0^T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\mathrm{d}t,\ k\in\mathcal{Z}.}$$

Il est à noter que le $1/T$ n'est là que pour normaliser le signal sur une période [3].

On pourrait se demander pourquoi le formalisme de l'exponentielle complexe a été utilisé alors qu'*a priori*, des sinus auraient suffi. De plus, que représentent les fréquences négatives (car la somme porte sur toutes les valeurs de k) ? Intuitivement, l'exponentielle complexe va permettre de traiter les cas où les coefficients de Fourier ne sont pas purement réels, et détiennent ainsi de l'information sur la phase. En faisant cela, certains termes imaginaires apparaissent et, à priori, n'ont pas de sens physique. Heureusement, la fonction qui décrit la partie imaginaire des coefficients de Fourier en fonction de la fréquence est impaire, de sorte qu'en sommant sur toutes les fréquences, y compris les négatives, les composantes imaginaires s'annulent. En réalité, ces fréquences négatives découlent directement de la formule d'Euler pour représenter les fonctions trigonométriques en fonction d'exponentielles complexes (voir les formules de la section précédente). Elles sont donc nécessaires pour garantir une expression mathématique correcte. Ceci est expliqué dans la deuxième partie de cette vidéo : `https://www.youtube.com/watch?v=1JnayXHhjlg`.

Attention que la vidéo traite de la *transformée* de Fourier qui est abordé au TP suivant. La différence essentielle est que les séries de Fourier décrivent des signaux **périodiques** avec un ensemble **discret** de fréquences (harmoniques), alors que la transformée de Fourier décrit n'importe quel signal, mais avec un ensemble **continu** de fréquences (d'où l'intégrale au lieu de la somme, voir TP suivant).

On peut aussi se convaincre mathématiquement qu'il est correct d'utiliser des exponentielles complexes et des fréquences négatives. En effet, comme mentionné ci-dessus, les coefficients de Fourier sont, en toute généralité, des nombres complexes. Ils peuvent donc s'écrire :

$$\hat{x}_k = |\hat{x}_k|e^{jArg(\hat{x}_k)}.$$

L'harmonique k, *i.e.* le sinus/cosinus de fréquence kf, décrite dans la décomposition en série de Fourier est donnée par :

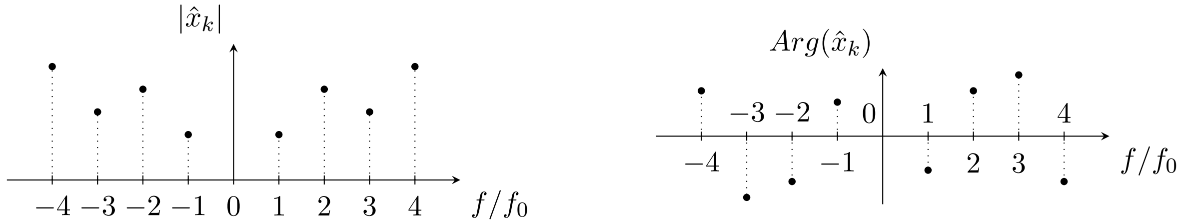
$$f_k(t) = \hat{x}_{-k}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} + \hat{x}_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}.$$

En utilisant Euler, l'expression devient :

$$f_k(t) = 2|\hat{x}_k|\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t + Arg(\hat{x}_k)\right)$$

3. Selon les références, on peut aussi trouver $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{x}_k e^{jk\omega_0 t}$ et $\hat{x}_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t$, où ce sont les coefficients qui sont normalisés dans ce cas.

qui est bien une simple fonction trigonométrique de la fréquence attendue, avec un éventuel déphasage. Ce résultat est obtenu en tenant compte que le *spectre d'amplitude* de $x(t)$ (*i.e.* le tracé des $|\hat{x}_k|$ en fonction des fréquences) est une fonction paire, et que le *spectre de phase* de $x(t)$ (*i.e.* le tracé des $Arg(\hat{x}_k)$ en fonction des fréquences) est une fonction impaire.



Exemple : décomposition en série de Fourier du signal $x(t) = 2\cos\left(2\pi 10t - \frac{\pi}{4}\right)$
Par la formule du cosinus, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{j\left(2\pi 10t - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(2\pi 10t - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi 10t} + e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j2\pi 10t} \\ &= \hat{x}_1 e^{j2\pi f_0 t} + \hat{x}_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

où la dernière ligne vient de la formule des séries de Fourier, avec deux coefficients non nuls seulement. Par identification entre les deux dernières équations (puisque $f_0 = 10$ [Hz.]), on trouve $\hat{x}_1 = e^{-j\frac{\pi}{4}}$ (*i.e.*, $|\hat{x}_1| = 1$ et $Arg(\hat{x}_1) = -\frac{\pi}{4}$) et $\hat{x}_{-1} = e^{j\frac{\pi}{4}}$ (*i.e.*, $|\hat{x}_{-1}| = 1$ et $Arg(\hat{x}_{-1}) = \frac{\pi}{4}$).

Quelle est l'utilité de la décomposition en série de Fourier dans ce cours ?
L'utilité principale est d'obtenir une représentation fréquentielle des signaux. Ceci permettra d'obtenir une représentation entrée-sortie dans le domaine fréquentiel des systèmes (avec pour "signal de base" l'exponentielle complexe par analogie à l'impulsion dans le domaine temporel). Par la suite, les différents avantages de cette approche seront mis en avant.

Dans l'étude des systèmes, il est intéressant de travailler avec les signaux en temporel car c'est ainsi qu'ils sont perçus dans la vie de tous les jours, mais aussi en fréquentiel, car le design et l'analyse s'en voient grandement facilités. Les séries de Fourier, et les transformées que l'on verra par la suite, sont des outils très puissants permettant de passer d'un domaine à l'autre.

Enfin, on pourrait se demander pourquoi s'intéresser à des fonction trigonométriques et pas n'importe quel autre signal périodique, comme un signal carré ou triangulaire ?
Notre but est d'obtenir une relation plus simple à manipuler, et il se trouve que les sinusoïdes sont les seuls signaux périodiques qui ne changent pas de forme lorsqu'ils sont soumis à l'action d'un système LTI. Conserver la même allure en entrée et en sortie du système permet d'étudier le rôle du système sur base de son gain d'amplitude et de déphasage (pour chaque fréquence), ce qui permettra d'obtenir des outils très puissants pour le design et l'analyse des systèmes de contrôle.

Notions clés

- Rappel sur les nombres complexes
- Comprendre le passage de la représentation temporelle d'un signal sinusoïdal en son spectre en amplitude et en phase
- Comprendre l'outil de la décomposition en série de Fourier
- Calculer la série de Fourier
- Comprendre et pouvoir expliquer la Figure 4

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1

Donner la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique carré (*square-wave signal*). Utiliser Matlab/Python/... pour illustrer vos résultats.

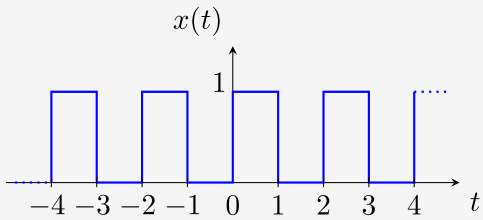


Schéma de résolution : décomposition en série de Fourier

1- Trouver la période

2- Calculer les coefficients de Fourier

- Formule :

$$\hat{x}_k = \int_0^T x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} \mathrm{d}t, \ k \in \mathcal{Z}$$

- Expression analytique de $x(t)$ (sur une période)
- Décomposition de l'intégrale (suivant l'allure de $x(t)$)
- Remplacer $x(t)$ par son expression analytique dans l'intégrale
- Résolution de l'intégrale et simplifier au maximum l'expression pour les différentes valeurs de k

3- Écrire l'expression de la série de Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathcal{Z}} \hat{x}_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

♡ La Figure 4 illustre un signal carré définit par sa série de Fourier. Cette Figure permet de visualiser la décomposition fréquentielle du signal comme un nouvel axe d'étude pour décrire le signal [4].

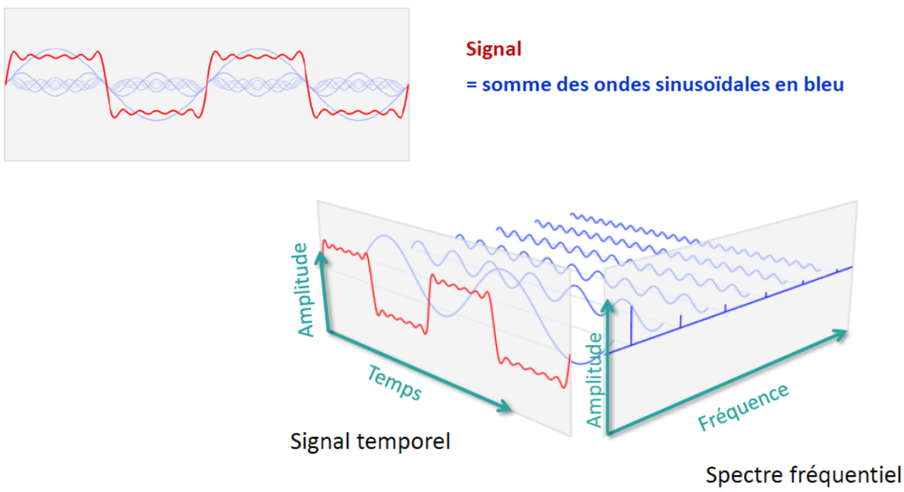


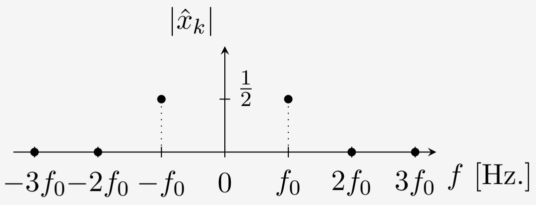
FIGURE 4 – Décomposition d'un signal carré périodique

4. https://blricrex.hypotheses.org/files/2015/03/FormaEEGLab_Basics_Signal.pdf

3 Exercices à faire

Exercice 2

Soient les spectres en amplitude et en phase suivants. Déterminer le signal temporel auquel ils correspondent.



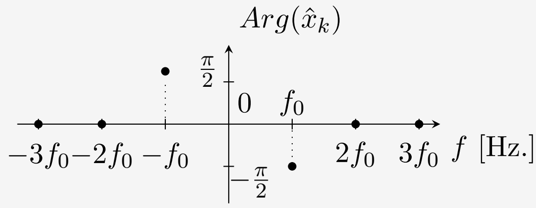


Schéma de résolution : trouver un signal analytique à partir de son spectre fréquentiel
Écrire la formule de la série de Fourier et identifier les coefficients puis reconnaître une expression connue. Utiliser l'exemple et les schémas indiqués dans la section 1.4.

Exercice 3 = Exercice 5.2 [TXB]

Établir les développements en série de Fourier des signaux continus suivants.

a) $x_1(t) = \cos(\omega_0 t)$

b) $x_2(t) = \sin(\omega_0 t)$

c) $x_3(t) = \cos(2t + \pi/4)$

d) $x_4(t) = \cos(4t) + \sin(6t)$

e) $x_5(t) = \sin^2(t)$

Exercice 4 = Janvier 2022 - Q3 (i) [Online] On donne le signal suivant :

$$x(t) = \cos(2t + \pi/4) + \sin(4t - \pi/8)$$

Donnez le spectre fréquentiel en amplitude et en phase du signal. L'axe des abscisses est exprimé en fréquence [Hz]. Expliquez vos calculs.

4 Pour s'exercer

Exercice 5 = Exercice 5.5 [TXB]

Calculer la série de Fourier du signal périodique $x_p(t)$ représenté ci-dessous.

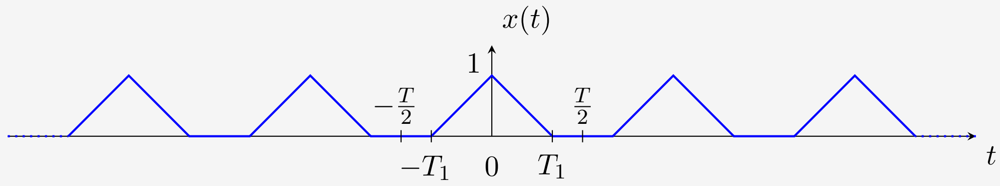


Schéma de résolution : décomposition en série de Fourier

1- Période du signal $x(t)$.

2- Calcul des coefficients de Fourier :

- Formule : ...
- Expression analytique de $x(t)$: ...
- Décomposition de l'intégrale (suivant la forme de $x(t)$) : ...
- Remplacer $x(t)$ par son expression analytique dans l'intégrale : ...
- Résolution de l'intégrale et simplifier au maximum l'expression pour les différentes valeurs de k : ...
  Conseils : $e^{(jO)}$, intégration par partie, ne pas oublier le cas $k = 0$, bien mettre en évidence les coefficients de Fourier pour les différents cas.

3- Écrire l'expression de la série de Fourier : ...

Exercice 6 = Exercice 5.8 [TXB]

Déterminer la représentation en série de Fourier du signal périodique $x(t)$ de période 2 dont la valeur entre -1 et 1 est

$$x(t) = e^{-t}$$

5 Sources supplémentaires

https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM (seulement jusqu'à 10', suite la semaine prochaine)
https://www.youtube.com/watch?v=1JnayXHhjlg
https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k
https://www.youtube.com/watch?v=UKHBWzoOKsY&list=PLT5_DQAJJLh-ogHjHcLtFYMQy7SkZ7-3i
http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/hugues.garnier/Enseignement/TdS/TdS-Serie_Fourier.pdf
https://blricrex.hypotheses.org/files/2015/03/FormaEEGLab_Basics_Signal.pdf

TP7

Exercice 1
Résolution complète

1- Période : $T = 2$ [s] $\rightarrow$ pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

2- Calcul des coefficients de Fourier :

- Formule :
$$\hat{x}_k = \int_0^T x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} \mathrm{d}t,\ k \in \mathcal{Z}$$

- Expression analytique de $x(t)$:
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in]0, \frac{T}{2}[\\ 0 & \text{si} \quad t \in]\frac{T}{2}, T[\end{cases}$$

- Décomposition de l'intégrale (suivant la forme de $x(t)$) :
$$\hat{x}_k = \int_0^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} \mathrm{d}t,\ k \in \mathcal{Z}$$

- Remplacer $x(t)$ par son expression analytique dans l'intégrale :
$$\hat{x}_k = \int_0^{T/2} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} \mathrm{d}t,\ k \in \mathcal{Z}$$

- Résolution de l'intégrale et simplifier au maximum l'expression pour les différentes valeurs de k :
$$\hat{x}_k = -\frac{1}{jk\omega} \left[e^{-jk\omega t} \right]_0^1 = \frac{j}{k\omega} \left(e^{-jk\omega} - 1 \right)$$
Or, $e^{-jk\omega} = \cos(-k\pi) + j\sin(-k\pi) = \cos(k\pi) - j\sin(k\pi) = \cos(k\pi)$. On distingue alors 3 cas :
  - k est pair : $\hat{x}_k = \frac{j}{k\pi}(1 - 1) = 0$
  - k est impair : $\hat{x}_k = \frac{j}{k\pi}(-1 - 1) = \frac{-2j}{k\pi}$
  - $k = 0$: $\hat{x}_0 = \int_0^T x(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1$

3- Donner l'expression de la série de Fourier :
$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathcal{Z}} \hat{x}_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{2}\hat{x}_0 + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{Z},\ k \text{ impair}} \frac{2}{jk\pi} e^{jk\pi t}$$

En développant selon les valeurs de k on a
$$\begin{aligned} x(t) = {} & \frac{1}{2} && (k = 0) \\ & + \frac{1}{2}\frac{2}{j\pi}(\cos(\pi t) + j\sin(\pi t)) && (k = 1) \\ & - \frac{1}{2}\frac{2}{j\pi}(\cos(\pi t) - j\sin(\pi t)) && (k = -1) \\ & + \frac{1}{2}\frac{2}{j3\pi}(\cos(3\pi t) + j\sin(3\pi t)) && (k = 3) \\ & - \frac{1}{2}\frac{2}{j3\pi}(\cos(3\pi t) - j\sin(3\pi t)) && (k = -3) \\ & + \dots \end{aligned}$$

i.e.
$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\pi t) + \dots = \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathcal{Z},\ k \text{ impair}} \frac{2}{k\pi}\sin(k\pi t).$$

Exercice 2
On a
$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{x}_k\ e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{x}_k|\ e^{j\mathrm{Arg}(\hat{x}_k)}\ e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$
En considérant que $\frac{1}{T} = f_0$ et en développant la somme sur les k, on obtient
$$x(t) = f_0\left[|\hat{x}_0|\ e^{j\mathrm{Arg}(\hat{x}_0)}\ e^0 + |\hat{x}_1|\ e^{j\mathrm{Arg}(\hat{x}_1)}\ e^{j2\pi f_0 t} + |\hat{x}_{-1}|\ e^{j\mathrm{Arg}(\hat{x}_{-1})}\ e^{-j2\pi f_0 t} + \ldots\right]$$
En remplaçant les $|\hat{x}_k|$ et les $e^{j\mathrm{Arg}(\hat{x}_k)}$ sur base des spectres fournis, on obtient
$$x(t) = f_0\left[0 + \frac{1}{2}\ e^{-j\frac{\pi}{2}}\ e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}\ e^{j\frac{\pi}{2}}\ e^{-j2\pi f_0 t} + 0 + 0 + \ldots\right] = f_0\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} = f_0 \sin(\underbrace{2\pi f_0}_{\omega_0} t)$$

Exercice 3 = Exercice 5.2 [TXB]
On a $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$ avec les coefficients suivants.

a) Via la formule d'Euler ($\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$) et par identification avec la définition de la série de Fourier, on trouve $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, les autres c_k sont nuls. (Ceci était une version courte et rapide vers la solution. La version longue avec les développements complets des intégrales et des intégrations par partie est laissée comme exercice pour l'étudiant. La réponse finale sera bien entendu identique. L'étudiant doit être capable d'utiliser les 2 versions.)

b) Via la formule d'Euler ($\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}$) et par identification avec la définition de la série de Fourier, on trouve $c_1 = -c_{-1} = \frac{1}{2j}$, les autres c_k sont nuls. (Voir aussi Ex2. Ceci était une version courte et rapide vers la solution. La version longue avec les développements complets des intégrales et des intégrations par partie est laissée comme exercice pour l'étudiant. La réponse finale sera bien entendu identique. L'étudiant doit être capable d'utiliser les 2 versions.)

c) On remarque tout d'abord que $\omega_0 = 2$.
Ensuite, vie la formule d'Euler on a
$$\begin{aligned}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{e^{j(2t+\pi/4)} + e^{-j(2t+\pi/4)}}{2} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2t}\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{j2t} + \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{-j2t}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j)e^{j2t} + \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)e^{-j2t}\end{aligned}$$
Par identification avec la définition de la série de Fourier, on trouve
$$c_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j); \qquad c_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)$$
les autres c_k sont nuls.

d) On remarque tout d'abord que $\omega_0 = 2$
Ensuite, on connaît les coefficients pour un signal de type $\cos(k\omega_0 t)$: $c_k = c_{-k} = \frac{1}{2}$. Pour $\cos(4t)$, on a donc $c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}$
Après, on connaît les coefficients pour un signal de type $\sin(k\omega_0 t)$: $c_k = -c_{-k} = \frac{1}{2j}$. Pour $\sin(6t)$, on a donc $c_3 = -c_{-3} = \frac{1}{2j}$. En combinant tous les résultats, on obtient les coefficients pour le signal $x(t)$:
$$c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}; \qquad c_3 = -c_{-3} = \frac{1}{2j}$$
les autres c_k sont nuls.

e) Nous pouvons réécrire le signal en utilisant la formule d'Euler :

$$\sin^2(t) = \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)^2$$

En développant le carré, on trouve alors

$$\sin^2(t) = \frac{-e^{j2t} - e^{-j2t} + 2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

On trouve alors $\omega_0 = 2$ et par identification des coefficients avec la définition de la série de Fourier, on a

$$c_0 = \frac{1}{2}; \qquad c_1 = c_{-1} = \frac{-1}{4}$$

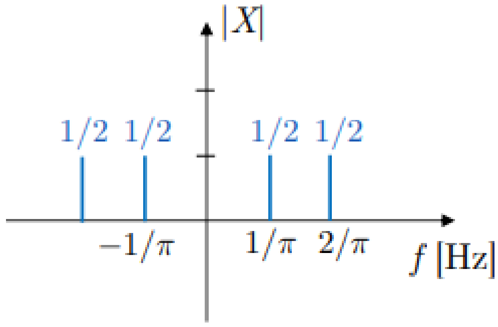
les autres c_k sont nuls.

Exercice 4 = Janvier 2022 - Q3 (i)
On remarque que $\omega_0 = 2$. On peut réécrire chaque signal individuel en utilisant les formules d'Euler :

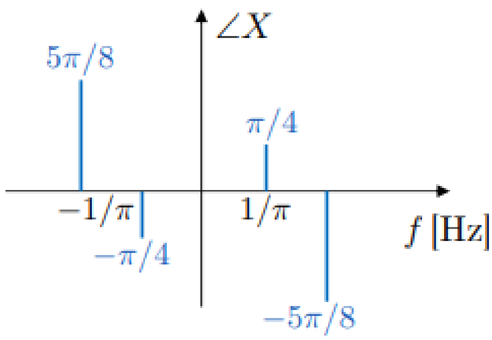
$$\cos(2t + \pi/4) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2t} \rightarrow |\hat{x}_1| = |\hat{x}_{-1}| = 1/2 \quad \text{and} \quad \angle\hat{x}_1 = -\angle\hat{x}_{-1} = \pi/4$$

$$\sin(4t - \pi/8) = \cos(\pi/2 - 4t + \pi/8) = \cos(4t - 5\pi/8) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{8}}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{8}}e^{-j4t}$$
$$\rightarrow |\hat{x}_2| = |\hat{x}_{-2}| = 1/2 \quad \text{and} \quad \angle\hat{x}_2 = -\angle\hat{x}_{-2} = -5\pi/8$$

Puisque l'axe des x des spectres est exprimé en fréquence [Hz], il faut placer les amplitudes et les phases de $\cos(2t + \pi/4)$ en $-1/\pi$ (i.e. $k = -1$) et en $1/\pi$ (i.e. $k = 1$). De manière similaire, il faut placer les amplitudes et les phases de $\cos(4t - 5\pi/8)$ en $-2/\pi$ (i.e. $k = -2$) et en $2/\pi$ (i.e. $k = 2$). Les spectres fréquentiels sont donc les suivants



(a) Spectre fréquentiel de l'amplitude de $x(t)$



(b) Spectre fréquentiel de la phase de $x(t)$

Exercice 5 = Exercice 5.5 [TXB]
Le signal $x_p(t)$ est décrit par

$$x_p(t) = \begin{cases} -\frac{t}{T_1} + 1 & , 0 < t < T_1 \\ \frac{t}{T_1} + 1 & , -T_1 < t < 0 \\ 0 & , -\frac{T}{2} < t < -T_1 \text{ ou } T_1 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Sa période vaut donc T et on en déduit que $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Sa série de Fourier est donnée par

$$x_p(t) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{x}_k \, e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Il faut donc trouver les coefficients $\hat{x}_k$, qui sont donnés par

$$\hat{x}_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t)\ e^{-jk\omega t}\ dt \qquad (\spadesuit)$$

L'équation ($\spadesuit$) peut se décomposer en

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= 2\underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{-T_1} x_p(t)\ e^{-jk\omega t}\ dt}_{=0 \text{ car } x_p(t)=0} + \int_{-T_1}^{0}\left(\frac{t}{T_1}+1\right)\ e^{-jk\omega t}\ dt + \int_0^{T_1}\left(-\frac{t}{T_1}+1\right)\ e^{-jk\omega t}\ dt \\ &= \underbrace{\int_{-T_1}^{0}\frac{t}{T_1}\ e^{-jk\omega t}\ dt}_{\bigstar} + \underbrace{\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega t}\ dt}_{\blacklozenge} + \underbrace{\int_0^{T_1} -\frac{t}{T_1}\ e^{-jk\omega t}\ dt}_{\blacksquare}\end{aligned}$$

Pour $k = 0$:

$$\bigstar = \frac{t^2}{2T_1}\Big]_{-T_1}^{0} = \frac{-T_1}{2}; \qquad \blacklozenge = t\Big]_{T_1}^{T_1} = 2T_1; \qquad \blacksquare = -\frac{t^2}{2T_1}\Big]_0^{T_1} = \frac{-T_1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{x}_0 = T_1}$$

Pour $k \neq 0$:

- Pour $\bigstar$ et $\blacksquare$, une intégration par parties est nécessaire :

$$\begin{aligned}\int_a^b (-)t\ e^{-jk\omega t}\ dt &= (-)\frac{j}{k\omega}t\ e^{-jk\omega t}\Big]_a^b - \frac{j}{k\omega}\int_a^b (-)e^{-jk\omega t}\ dt \\ &= (-)\frac{jT_1}{k\omega}e^{(-)jk\omega T_1} - (-)\left(\frac{j}{k\omega}\right)^2 e^{-jk\omega t}\Big]_a^b\end{aligned}$$

Pour $\bigstar$, $a = -T_1$ et $b = 0$:

$$\bigstar = \frac{j}{k\omega}e^{jk\omega T_1} + \frac{1}{T_1(k\omega)^2} - \frac{1}{T_1(k\omega)^2}e^{jk\omega T_1}$$

Pour $\blacksquare$, $a = 0$ et $b = T_1$:

$$\bigstar = -\frac{j}{k\omega}e^{-jk\omega T_1} + \frac{1}{T_1(k\omega)^2} - \frac{1}{T_1(k\omega)^2}e^{-jk\omega T_1}$$

- Pour $\blacklozenge$:

$$\blacklozenge = \frac{j}{k\omega}[e^{-jk\omega T_1} - e^{jk\omega T_1}]$$

$$\Rightarrow \hat{x}_k = \frac{2}{T_1(k\omega)^2} - \frac{1\cdot 2}{T_1(k\omega)^2}\underbrace{\frac{\left(e^{jk\omega T_1} + e^{-jk\omega T_1}\right)}{2}}_{\cos(k\omega T_1)} \leftrightarrow \boxed{\hat{x}_k = \frac{2}{T_1(k\omega)^2}\left(1 - \cos(k\omega T_1)\right)}$$

En conclusion,

$$x_p(t) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathcal{Z}} \hat{x}_k\, e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad \text{avec} \quad \hat{x}_k = \begin{cases} \frac{2\left(1-\cos\left(T_1\frac{2\pi}{T}k\right)\right)}{T_1\left(\frac{2\pi}{T}k\right)^2}, & k \neq 0 \\ T_1, & k = 0\end{cases}$$

Exercice 6 = Exercice 5.8 [TXB]
On sait que $T = 2$; on en déduit alors que $\omega = \pi$. Le signal périodique $x_p(t)$ est donné par

$$x_p(t) = e^{-t}, \quad -1 + nT < t < 1 + nT \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Sa série de Fourier est donnée par

$$x_p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k \, e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Il faut donc trouver les coefficients $\hat{x}_k$, qui sont donnés par

$$\hat{x}_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) \; e^{-jk\omega t} \; dt$$

On a

$$\hat{x}_k = \int_{-1}^{1} e^{-t} \; e^{-jk\omega t} \; dt = \int_{-1}^{1} e^{-(jk\omega+1)t} \; dt = \left. \frac{e^{-(jk\omega+1)t}}{-(jk\omega+1)} \right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{1+jk\pi} \left(\underbrace{e^{-jk\omega}}_{=\begin{cases} 1, & \text{k pair} \\ -1, & \text{k impair} \end{cases}} \qquad e^{-1} - e^{jk\omega} e^{1} \right)$$

Au final, on a

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{Z}} \hat{x}_k \, e^{jk\pi t} \qquad \text{avec} \qquad hatx_k = \frac{e - e^{-1}}{(1+jk\pi)} (-1)^k$$