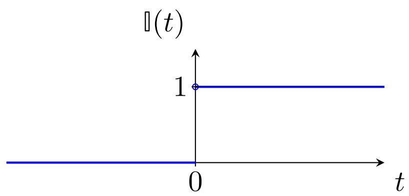
TP6 : Convolution

1 Concept

1.1 Signaux particuliers

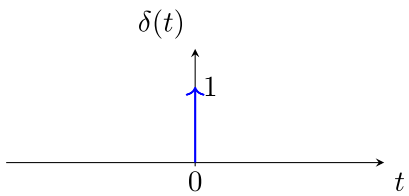
La fonction échelon [1]

$$\mathbb{I}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$



L'impulsion de Dirac

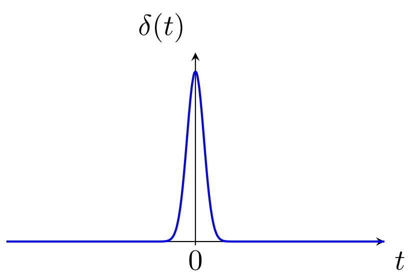
$$\delta(t) = \begin{cases} \text{"}\infty\text{"} & \text{si} \quad t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Attention que le "1" ne désigne pas une ordonnée, mais bien l'aire comprise sous la courbe de l'impulsion. On peut voir l'impulsion de Dirac comme $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0}$ d'un rectangle de hauteur $\frac{1}{\varepsilon}$, et de largeur ε. Ainsi, l'aire est constante et vaut 1. C'est une propriété de l'impulsion de Dirac et c'est cette aire que l'on note à côté de la flèche :

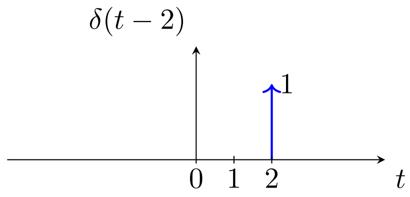
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1.$$

L'impulsion peut être visualisée comme une gaussienne, dont la "largeur" tend vers 0, et l'amplitude vers l'infini. Cette *distribution* est considérée comme une fonction de manière informelle telle que présentée plus haut.



Comme tout signal, on peut lui appliquer des transformations (*cfr.* TP1). Par exemple, le signal $\delta(t-2)$ se représente comme suit.

1. Elle est parfois aussi notée II ou $1\big|_+$



Une propriété intéressante de ce signal est qu'il est nul pour toute valeur sauf une : celle qui, pour $\delta(\tau(t))$ est telle que $\tau(t) = 0$. Ainsi, si on multiple ce signal par un autre, seule la valeur de cet autre signal en un seul point sera considérée. Cela permet "d'isoler" une valeur d'un signal. Mathématiquement et de manière simplifiée, soit $f(t)$ un signal quelconque :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(t)\mathrm{d}t && \text{car } \delta(t) \text{ est nul partout sauf en } t=0 \\
&= f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t && \text{car } f(0) \text{ est une constante} \\
&= f(0) && \text{car l'intégrale est égale à 1 par définition}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-2)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(2)\delta(t-2)\mathrm{d}t && \text{car } \delta(t-2) \text{ est nul partout sauf en } t=2 \\
&= f(2)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-2)\mathrm{d}t && \text{car } f(2) \text{ est une constante} \\
&= f(2)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t^*)\mathrm{d}t^* && \text{par un changement de variable } t-2=t^* \\
&= f(2) && \text{car l'intégrale est égale à 1 par définition}
\end{aligned}$$

1.2 Introduction à la convolution

Peu importe la complexité du système, on souhaiterait utiliser une seule fonction, décrivant la boîte noire, telle que la sortie puisse être déterminée sur base de n'importe quelle entrée que l'on fournit, sans se soucier des états internes : $y = S\{u\}$.

Attention ! On pourra utiliser ces représentations entrée-sortie uniquement si le système obéit au **principe de superposition** ($\rightarrow$ additivité et homogénéité), *i.e.* si $u_1 \rightarrow y_1$ et $u_2 \rightarrow y_2$ alors $au_1 + bu_2 \rightarrow ay_1 + by_2$ (cf : TP0). Ce principe est respecté pour les systèmes linéaires ! Par conséquent, il est **toujours possible de décrire les systèmes LTI par une relation $y = S\{u\}$ entrée-sortie.** [2]

Dès lors, le signal d'entrée $u(t)$ peut donc être décomposé en une somme de signaux simples $u_i(t)$!

$$\boxed{\text{Si } u = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i \text{ , alors } y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i}$$

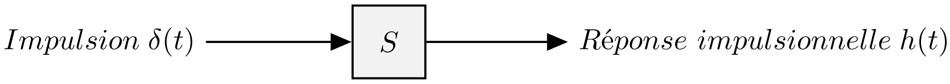
L'idée de la représentation entrée-sortie abordée ici va donc être décomposée en trois étapes :

1. Décomposition du signal en signaux aussi simples que possible.
2. Recherche de la sortie du système lorsque l'entrée est un de ces signaux simples.

2. Pour les systèmes non-linéaires, seule la représentation d'états est envisageable en général. Cependant, un système réel peut souvent être approché localement par une série de systèmes linéaires.

3. Conclusion quant à la sortie totale du système (somme de signaux simples → somme des réponses à ces signaux simples).

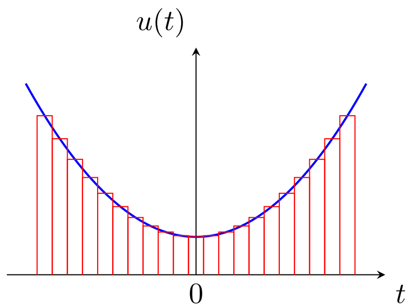
En effet, si on connaît la réponse du système à des signaux très simples, par exemple des impulsions, on peut combiner ces signaux très simples pour construire le signal d'entrée de départ plus complexe (à priori, n'importe quel signal pourrait être décomposé comme une somme éventuellement infinie d'impulsions). On en déduit donc facilement la sortie du système pour ce signal d'entrée complexe, simplement par cette reconstruction. Schématiquement, on décompose le système comme :



On appelle en effet *réponse impulsionnelle* la réponse à un signal "impulsion". Un système peut donc être entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle, au vu de la discussion ci-dessus.

Quel est l'avantage de cette approche ? La représentation entrée-sortie fait abstraction du fonctionnement interne du système.

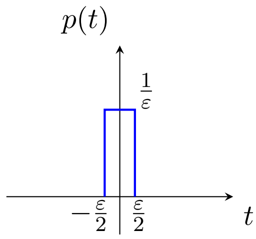
Comment obtenir une formule satisfaisante pour la décomposition de n'importe quel signal "compliqué" en signaux simples et la reconstruction de la réponse totale ?
D'une certaine manière [3], on peut voir le signal $u(t)$ comme une somme de petits bâtonnets :



Mathématiquement, cela s'écrit

$$u(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k\varepsilon) p(t - k\varepsilon)\varepsilon$$

avec $p(t)$ le signal rectangulaire défini par :



Le produit $p(t - k\varepsilon)\varepsilon$ étant simplement un rectangle de hauteur unitaire, la somme représente bien le signal $u(t)$. ε est la largeur du rectangle et k, l'indice du rectangle.

De plus,

$$\begin{cases} \varepsilon & \longrightarrow 0 & \Longrightarrow & p(t) & \longrightarrow \delta(t) \\ k\varepsilon & \longrightarrow \tau & \Longrightarrow & p(t - k\varepsilon) & \longrightarrow \delta(t - \tau), \end{cases}$$

et si ε devient infiniment petit, la somme tend vers une intégrale et on a :

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)\mathrm{d}\tau}$$

3. Rappelez-vous la manière dont vous avez défini les intégrales dans le cours d'analyse, c'est assez similaire.

♡ Ainsi, pour un système LTI, on décompose l'entrée en une intégrale d'impulsions pondérées par les valeurs de l'entrée évaluée en τ. La sortie est donc calculée via la même intégrale mais en considérant la réponse impulsionnelle, pondérée par les valeurs de l'entrée (principe de superposition).

En effet,

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow h(t) \text{ (réponse impulsionnelle)} \\
\delta(t-\tau) &\longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow h(t-\tau) \\
u(\tau)\delta(t-\tau) &\longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow u(\tau)h(t-\tau) \\
u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau &\longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

L'expression mathématique obtenue à la fin du développement

$$\boxed{y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau}$$

est appelée **convolution** (ou **produit de convolution**) des signaux $u(t)$ et $h(t)$.
La convolution est commutative, associative et distributive.

NB : Le produit de convolution est ci-dessus introduit dans le cadre de la représentation de systèmes. De manière générale, on peut calculer le produit de convolution entre deux signaux (ou fonctions) $x_1(t)$ et $x_2(t)$ comme

$$\boxed{y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau.}$$

Notions clés

- Introduction à la notion de *réponse impulsionnelle* d'un système.
- La convolution est un *outil mathématique* important dans le calcul de la sortie d'un système. Cet outil permet de calculer la sortie d'un système pour n'importe quelle entrée via la *réponse impulsionnelle* du système.
- En pratique, on peut résoudre cette convolution de manière analytique (Exercice 1) ou de manière graphique (Exercice 2).

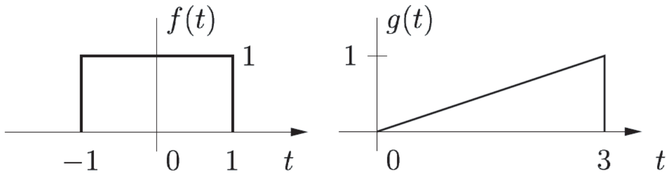
2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1 = Exercice 3.19 [TXB]

Établir analytiquement la convolution $y(t) = f(t) * h(t)$ des fonctions $f(t) = \mathbb{1}(t)$ et $h(t) = 2e^{-t}\,\mathbb{1}(t) - 2e^{2t}\mathbb{1}(t)$.

Exercice 2 = Exercice 3.20 [TXB]

Établir graphiquement la convolution $y(t) = f(t)*g(t)$ des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ représentées ci-dessous.



L'approche graphique de la convolution peut être expliquée en deux points :

- L'intégrale calcule l'aire sous le produit des deux fonctions (donc où elles se "recouvrent"/"se croisent" *i.e.* lorsque les deux fonctions sont **définies** pour les mêmes valeurs des abscisses).
  !!! Si une fonction est positive (au-dessus de l'axe horizontal) et l'autre est négative (en-dessous de l'axe horizontal), les deux fonctions sont bien définies pour ces valeurs de l'abscisse et donc on peut calculer la convolution.
- Il s'agit d'une procédure **flip and slide**. On retourne une des fonctions et on la décale pour différentes valeurs de t qui peut être visualisé comme un curseur.

Schéma de résolution : convolution graphique

1- Écrire la formule théorique de la convolution (rappel : cette formule est commutative).

2- Écrire les expressions analytiques des deux fonctions à convoluer.

3- Choisir une courbe qui restera telle quelle (exemple : $f(\tau)$). Dessiner l'autre courbe flippée (exemple : $g(t-\tau)$) et positionner en $t = 0$.

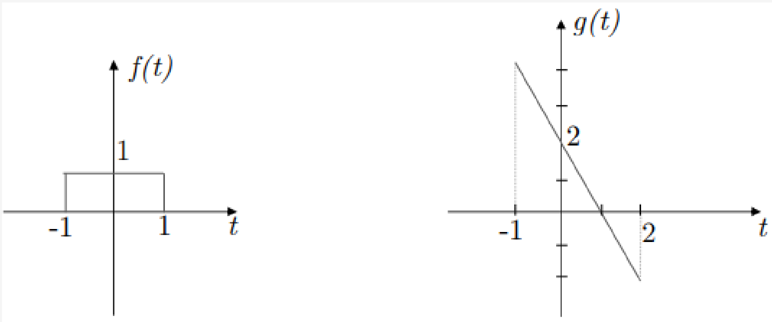
4- Déterminer toutes les situations de recouvrement possible entre les deux courbes, *i.e.* à quelles valeurs des abscisses les courbes se rencontrent ; t agit comme un curseur pour déplacer la courbe.

5- Résoudre l'intégrale (par rapport à τ) pour chaque intervalle défini sur t.

6- Écrire la réponse finale.

3 Exercices à faire

Exercice 3 = Janvier 2021- Q3 (ii)[Online]
On donne deux signaux dessinés ci-dessous :



On souhaite démarrer le calcul du produit de convolution $y(t) = f(t) * g(t)$ de manière graphique.

— Donnez les différents intervalles de t sur lesquels le calcul de la convolution va se décomposer.

— Écrivez l'intégrale à effectuer sur chaque intervalle de t en indiquant clairement les bornes et l'expression des signaux f et g considérées sur chaque intervalle. Il n'est pas demandé de résoudre l'intégrale mais simplement de mettre en équation avec les données disponibles.

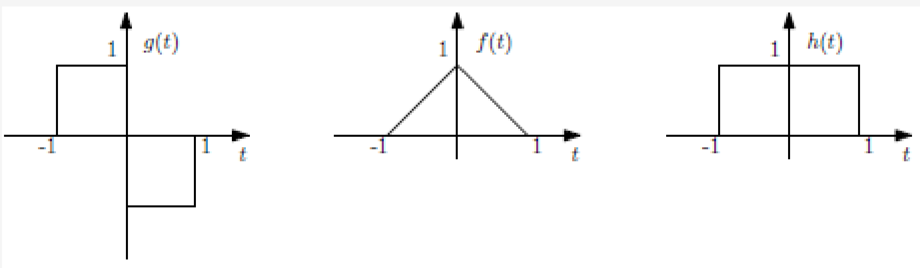
Exercice 4 = Aout 2019 - Q3 (i) [Online]
Soient les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ suivantes :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 0[\\ -1, & t \in [0, 1[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(t) = \exp(-t)\mathbb{1}(t)$$

(i) Calculer $y(t)$ le produit de convolution de $f(t)$ et $g(t)$ via la méthode graphique. Vérifier la cohérence des solutions aux bornes des différents intervalles de temps.

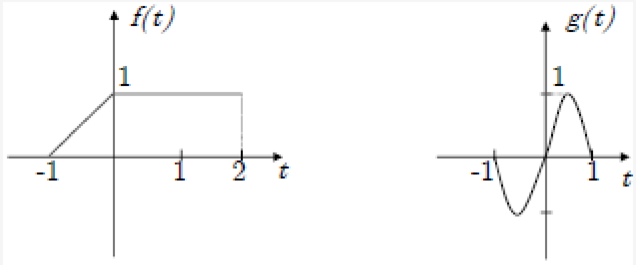
4 Pour s'exercer

Exercice 5 = Janvier 2019 - Q3 (i) et adapté [Online]
On donne les fonctions $g(t)$, $f(t)$ et $h(t)$ représentées ci-dessous :



Calculer le produit de convolution de $f(t)$ et $h(t)$ via la méthode graphique. Vérifier la cohérence des solutions aux bornes des différents intervalles de temps. (Question supplémentaire : Quelle est la relation entre $f(t)$ et $g(t)$?)

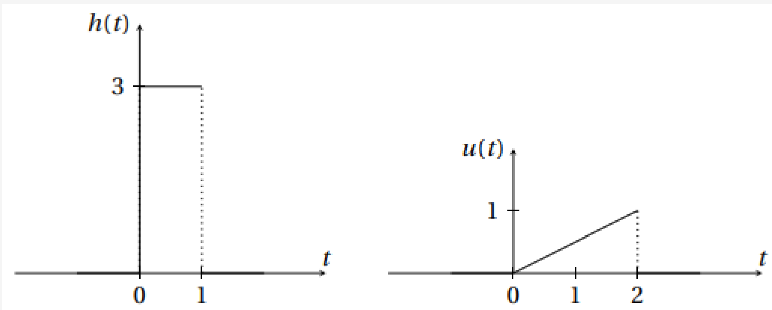
Exercice 6 = Août 2021- Q3 (i) [Online]
On donne deux signaux dessinés ci-dessous :



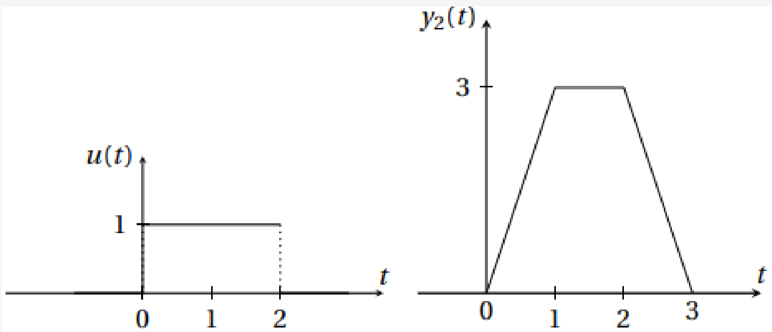
On souhaite démarrer le calcul du produit de convolution $y(t) = f(t) * g(t)$ de manière graphique. $f(t)$ est définie par segment et $g(t)$ est une sinusoïde.

- Donnez les différents intervalles de t sur lesquels le calcul de la convolution va se décomposer.
- Écrivez l'intégrale à effectuer sur chaque intervalle de t en indiquant clairement les bornes et l'expression des signaux f et g considérées sur chaque intervalle. Il n'est pas demandé de résoudre l'intégrale mais simplement de mettre en équation avec les données disponibles.

Exercice 7 = Exercice A2-sol [Online]
Soit le système LTI décrit par la réponse impulsionnelle $h(t)$. Le système est alors soumis à une entrée $u(t)$. Ces signaux sont représentés graphiquement ci-dessous.



(i) Donnez une expression analytique pour $u(t)$ et $h(t)$.
(ii) Représentez $u(t-\tau)$ et $h(\tau)$ pour $t > 0$ et $t < 0$ avec un axe temporel gradué en τ.
(iii) Déduisez grâce à ces représentations graphiques quels seront les différents intervalles de temps à distinguer pour obtenir le signal de sortie $y(t)$.
(iv) Effectuez la convolution graphique ou analytique de $h(t)$ et $u(t)$, en utilisant $u(t-\tau)$ et $h(\tau)$.
(v) Soit (u, y_2) une paire entrée-sortie du système représentée ci-dessous. Pouvez-vous en déduire facilement quelle sera la réponse du système à une entrée $u_3(t) = \mathbb{1}(t)$(en négligeant les points de discontinuité) ? Si oui, calculer cette réponse $y_3(t)$.



5 Sources supplémentaires

Ces deux vidéos illustrent la méthode à suivre pour réaliser une convolution de manière graphique et sa signification :

- https://www.youtube.com/watch?v=zoRJZDiPGds
- https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/convolution-examples-and-the-convolution-integral.html

TP6 - Solutions

Exercice 1 = Exercice 3.19 [TXB]
$y(t) = (3 - 2\exp -t - \exp 2t)\mathbb{1}(t)$

Résolution complète
1- Formule :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

2- Fonctions à convoluer :

$$f(t) = \mathbb{1}(t)$$
$$h(t) = 2e^{-t}\mathbb{1}(t) - 2e^{2t}\mathbb{1}(t)$$

Pour rappel,

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

3- Résolution de l'intégrale

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(2e^{-\tau}\mathbb{1}(\tau) - 2e^{2\tau}\mathbb{1}(\tau)\Big)\mathbb{1}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad \text{remplacement dans la formule} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}(\tau)\Big(2e^{-\tau} - 2e^{2\tau}\Big)\mathbb{1}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{0}^{+\infty} \Big(2e^{-\tau} - 2e^{2\tau}\Big)\mathbb{1}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad \text{car } \mathbb{1}(\tau) = 0 \text{ pour } \tau < 0 \end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{1}(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \tau \\ 1 & \text{si} \quad t \geq \tau \end{cases}$$

Le premier cas implique que si $\tau > t$, alors $y(t) = 0$. Cela permet de décomposer l'intégrale :

a. Pour $t < 0$, on a $y(t) = 0$ puisque $\tau \geq 0$

b. Pour $t \geq 0$, l'intégrale se réduit comme suit

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\int_{0}^{t} e^{-\tau} - e^{2\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= 2\Big[-e^{-\tau} - \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big]_0^t \\ &= 2\Big(-e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t} + 1 + \frac{1}{2}\Big) \\ &= -2e^{-t} - e^{2t} + 3 \end{aligned}$$

4- Réponse finale $y(t)$:
En tenant compte des points a. et b., on a donc

$$y(t) = \Big(-2e^{-t} - e^{2t} + 3\Big)\mathbb{1}(t)$$

Exercice 2 = Exercice 3.20 [TXB]

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si t < -1 ou t > 4} \\ \frac{(t+1)^2}{6} & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ \frac{2t}{3} & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ \frac{-t^2+2t+8}{6} & \text{si } 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Résolution complète :
1- Formule :

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

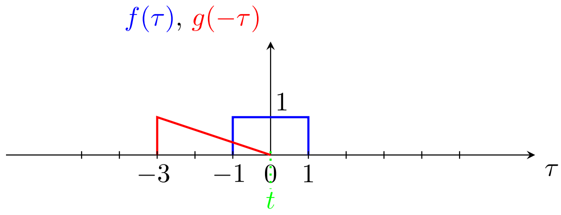
2- Expressions analytiques des courbes à convoluer :

$$f(t) = \mathbb{1}(t+1) - \mathbb{1}(t-1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} & \text{si} \quad t \in [0, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : La convolution étant commutative, on aurait très bien pu *flip and slide* $f(t)$ à la place de $g(t)$ $\left(y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(t-\tau) \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau\right)$.

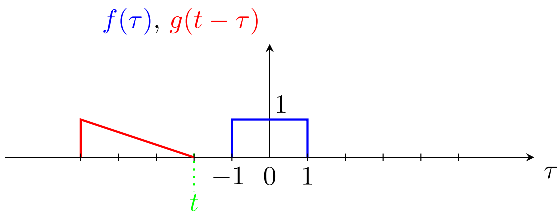
3- Dessiner les deux fonctions, dont une est *flipped*. Le curseur est en $t = 0$. Attention, l'axe est bien τ et non t (car l'intégrale est bien exprimée selon τ !).



4 - *Slide* la fonction pour trouver les différents intervalles possibles de recouvrement des deux fonctions : $t < -1$, $-1 < t < 1$, $1 < t < 2$, $2 < t < 4$, $t > 4$.

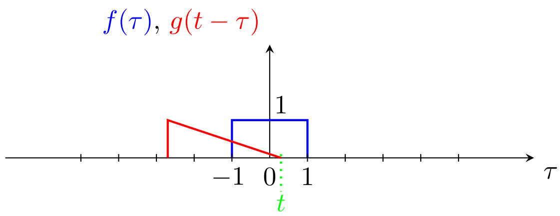
5- Résoudre l'intégrale (par rapport à τ) pour intervalle de t.

- $t < -1$
  En -1, il s'agit du moment où $g(t-\tau)$ et $f(\tau)$ commencent à se recouvrir. L'aire de recouvrement est nulle $\rightarrow y(t) = 0$ dans ce cas.



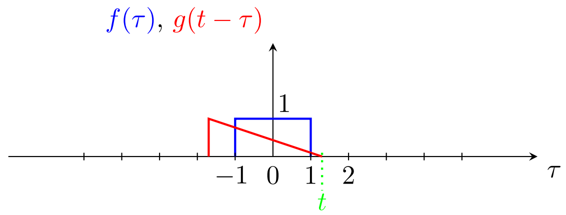
- $-1 < t < 1$
  En -1, il s'agit du moment où $g(t-\tau)$ et $f(\tau)$ commencent à se recouvrir, et 1 car c'est le moment où $g(t-\tau)$ et $f(\tau)$ commencent à se recouvrir entièrement.
  L'aire de recouvrement vaut dans ce cas (les bornes se trouvent en regardant sur le dessin la partie commune à $f(\tau)$ et $g(t-\tau)$: de l'intersection jusqu'à t dans ce cas-ci)

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-1}^{t} 1 \, \frac{t-\tau}{3} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-1}^{t} \frac{t}{3} \mathrm{d}\tau - \int_{-1}^{t} \frac{\tau}{3} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{t}{3} \left[\tau\right]_{-1}^{t} - \frac{1}{6} \left[\tau^2\right]_{-1}^{t} \\ &= \frac{t^2}{6} + \frac{t}{3} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}(t+1)^2 \end{aligned}$$



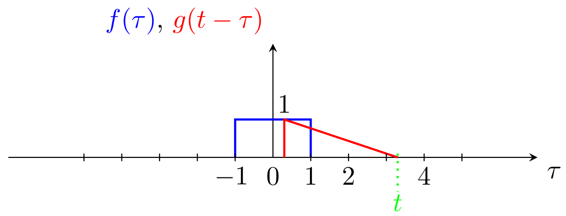
- $1 < t < 2$
  En 1, il s'agit du moment où $g(t-\tau)$ et $f(\tau)$ commencent à se recouvrir entièrement, et 2 car c'est le moment où $g(t-\tau)$ et $f(\tau)$ commencent à ne plus se recouvrir entièrement.
  L'aire de recouvrement vaut dans ce cas (les bornes se trouvent en regardant sur le dessin la partie commune à $f(\tau)$ et $g(t-\tau)$: toute la largeur de $f(\tau)$ dans ce cas-ci puisque $g(t-\tau)$ le recouvre complètement)

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-1}^{1} 1\, \frac{t-\tau}{3} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{t}{3} + \frac{t}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2t}{3} \end{aligned}$$

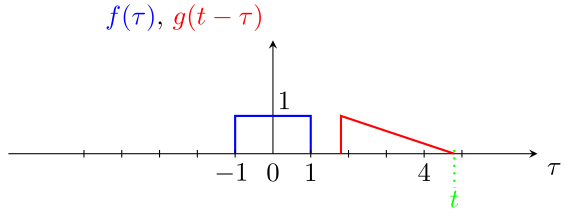


- $2 < t < 4$
  En 2, il s'agit du moment où $g(t-\tau)$ et $f(\tau)$ commencent à ne plus se recouvrir entièrement et 4 car c'est le moment où $g(t-\tau)$ et $f(\tau)$ commencent à ne plus se recouvrir du tout.
  L'aire de recouvrement vaut dans ce cas (les bornes se trouvent en regardant sur le dessin la partie commune à $f(\tau)$ et $g(t-\tau)$: du bord gauche de $g(t-\tau)$ $(t-3)$ jusqu'à l'intersection en 1)

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-3}^{1} 1\, \frac{t-\tau}{3} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{t}{3} - \frac{t(t-3)}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(t-3)^2 \\ &= -\frac{t^2}{6} + \frac{t}{3} + \frac{8}{6} \end{aligned}$$



- $t > 4$
  En 4, il s'agit du moment où $g(t-\tau)$ et $f(\tau)$ commencent à ne plus se recouvrir du tout.
  L'aire de recouvrement est nulle $\rightarrow y(t) = 0$ dans ce cas.



6- Ecrire la réponse finale en combinant tous les intervalles :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -1 \text{ ou } t \geq 4 \\ \frac{1}{6}(t+1)^2 & \text{si} \quad t \in [-1; 1[\\ \frac{2t}{3} & \text{si} \quad t \in [1; 2[\\ -\frac{t^2}{6} + \frac{t}{3} + \frac{8}{6} & \text{si} \quad t \in [2; 4[\end{cases}$$

On peut donc vérifier la continuité aux différentes bornes des intervalles. Autrement dit,

$$\lim_{t\to -1^-} y(t) = \lim_{t\to -1^+} y(t)$$
$$\lim_{t\to 1^-} y(t) = \lim_{t\to 1^+} y(t)$$
$$\lim_{t\to 2^-} y(t) = \lim_{t\to 2^+} y(t)$$
$$\lim_{t\to 4^-} y(t) = \lim_{t\to 4^+} y(t)$$

Exercice 3 = Janvier 2021 - Q3 (ii)
Les expressions analytiques de $f(t)$ et $g(t)$ sont donc

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} -2(t-1) & t \in [-1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition : $y(t) = f(\tau) * g(t-\tau) = f(t-\tau) * g(\tau)$. Au niveau des intervalles de temps t, on trouve :

- Pas de chevauchements : $t < -2$ et $3 < t$
- Chevauchement partiel : $-2 < t < 0$ et $1 < t < 3$
- Chevauchement complet : $0 < t < 1$

Ainsi, la mise en équations est donc la suivante

	$f(\tau)$ et $g(t-\tau)$	$f(t-\tau)$ et $g(\tau)$
$t < -2$	$y(t) = 0$	$y(t) = 0$
$-2 < t < 0$	$y(t) = \int_{-1}^{t+1} 1[-2(t-\tau-1)]d\tau$	$y(t) = \int_{-1}^{t+1} 1[-2\tau+2)]d\tau$
$0 < t < 1$	$y(t) = \int_{-1}^{+1} 1[-2(t-\tau-1)]d\tau$	$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} 1[-2\tau+2)]d\tau$
$1 < t < 3$	$y(t) = \int_{t-2}^{+1} 1[-2(t-\tau-1)]d\tau$	$y(t) = \int_{t-1}^{2} 1[-2\tau+2)]d\tau$
$3 < t$	$y(t) = 0$	$y(t) = 0$

Exercice 4 = Août 2019 - Q3
Par définition : $y(t) = f(\tau) * g(t-\tau) = f(t-\tau) * g(\tau)$.
Version $f(t-\tau)$ et $g(\tau)$:

- Pas de chevauchements $\rightarrow t < -1 : y(t) = 0$
- Chevauchement partiel positif $\rightarrow -1 < t < 0$:

$$y(t) = \int_0^{t+1} \exp(-\tau)d\tau = -\exp(-\tau)]_0^{t+1} = -\exp[-(t+1)] + 1$$

- Chevauchement partiel positif et négatif $\rightarrow 0 < t < 1$:

$$y(t) = \int_0^t -\exp(-\tau)d\tau + \int_t^{t+1} \exp(-\tau)d\tau = \exp(-t) - 1 - \exp[-(t+1)] + \exp -t = 2\exp(-t) - \exp[-(t+1)] - 1$$

- Chevauchement total $\rightarrow 1 < t : y(t) = \int_{t-1}^{t} -\exp(-\tau)d\tau + \int_t^{t+1} \exp(-\tau)d\tau = 2e^{-t} - e^{-(t+1)} - e^{-(t-1)}$

On peut donc vérifier la continuité aux différentes bornes des intervalles. Autrement dit,

$$\lim_{t\to -1^-} y(t) = \lim_{t\to -1^+} y(t) = 0$$
$$\lim_{t\to 0^-} y(t) = \lim_{t\to 0^+} y(t) = 1 - e^{-1}$$
$$\lim_{t\to 1^-} y(t) = \lim_{t\to 1^+} y(t) = 2e^{-1} - 1 - e^{-2}$$

$$\text{Récap : } y(t) = \begin{cases} 0 & t \in]-\infty; -1[\\ 1 - e^{-(t+1)} & t \in [-1; 0[\\ 2e^{-t} - e^{-(t+1)} - 1 & t \in [0; 1[\\ 2e^{-t} - e^{-(t+1)} - e^{-(t-1)} & t \in [1; +\infty[\end{cases}$$

Exercice 5 = Janvier 2019 - Q3 [Online]
Par définition : $y(t) = f(\tau) * h(t-\tau) = f(t-\tau) * h(\tau)$.
Version $f(\tau)$ et $h(t-\tau)$:

- Pas de chevauchements $\rightarrow t < -2$ et $2 < t$: $y(t) = 0$
- Chevauchement partiel où f croît $\rightarrow -2 < t < -1$:

$$y(t) = \int_{-1}^{t+1} \tau + 1 d\tau = \frac{(t+1)^2}{2} + t + 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{t^2}{2} + 2t + 2$$

- Chevauchement partiel où f croît et décroît avec chevauchement complet quand f croît $\rightarrow -1 < t < 0$:

$$y(t) = \int_{-1}^{0} \tau + 1 d\tau + \int_{0}^{t+1} -\tau + 1 d\tau = 1/2 - \frac{(t^2+1+2t)}{2} + t + 1 = -\frac{t^2}{2} + 1$$

- Chevauchement partiel où f croît et décroît avec chevauchement complet quand f décroît $\rightarrow 0 < t < 1$:

$$y(t) = \int_{t-1}^{0} \tau + 1 d\tau + \int_{0}^{+1} -\tau + 1 d\tau = -\frac{(t^2+1-2t)}{2} - (t-1) + 1/2 = -\frac{t^2}{2} + 1$$

- Chevauchement partiel où f décroît $\rightarrow 1 < t < 2$:

$$y(t) = \int_{t-1}^{+1} -\tau + 1 d\tau = -1/2 + 1 + \frac{t^2+1-2t}{2} - (t-1) = \frac{t^2}{2} - 2t + 2$$

On peut donc vérifier la continuité aux différentes bornes des intervalles. Autrement dit,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to -2^-} y(t) &= \lim_{t\to -2^+} y(t) = 0 \\
\lim_{t\to -1^-} y(t) &= \lim_{t\to -1^+} y(t) = 1/2 \\
\lim_{t\to 1^-} y(t) &= \lim_{t\to 1^+} y(t) = 1/2 \\
\lim_{t\to 2^-} y(t) &= \lim_{t\to 2^+} y(t) = 0
\end{aligned}$$

Récap : $y(t) = \begin{cases} 0 & t \in]-\infty; -2[\cup[2, +\infty[\\ \frac{t^2}{2} + 2t + 2 & t \in [-2; -1[\\ -\frac{t^2}{2} + 1 & t \in [-1; 1[\\ \frac{t^2}{2} - 2t + 2 & t \in [1; 2[\end{cases}$

Question supplémentaire : $g(t)$ est la dérivée de $f(t)$

Exercice 6 = Août 2021 - Q3 [Online]
Les expressions analytiques de $f(t)$ et $g(t)$ sont donc

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & t \in [-1, 0[\\ 1 & t \in [0, 2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition : $y(t) = f(\tau) * g(t-\tau) = f(t-\tau) * g(\tau)$. Au niveau des intervalles de temps t, on trouve :

- Pas de chevauchements : $t < -2$ et $3 < t$
- Chevauchement partiel sinus négatif : $-2 < t < -1$
- Chevauchement partiel sinus positif et négatif : $-1 < t < 0$ et $1 < t < 3$
- Chevauchement complet : $0 < t < 1$

Ainsi, la mise en équations est donc la suivante

	$f(\tau)$ et $g(t-\tau)$	$f(t-\tau)$ et $g(\tau)$
$t < -2$	$y(t) = 0$	$y(t) = 0$
$-2 < t < -1$	$y(t) = \int_{-1}^{t+1}(\tau+1)\sin(\pi(t-\tau))d\tau$	$y(t) = \int_{-1}^{t+1}(t-\tau+1)\sin(\pi\tau)d\tau$
$-1 < t < 0$	$y(t) = \int_{-1}^{0}(\tau+1)\sin(\pi(t-\tau))d\tau + \int_{0}^{t+1}\sin(\pi(t-\tau))d\tau$	$y(t) = \int_{-1}^{t}\sin(\pi\tau)d\tau + \int_{t}^{t+1}(t-\tau+1)\sin(\pi\tau)d\tau$
$0 < t < 1$	$y(t) = \int_{t-1}^{0}(\tau+1)\sin(\pi(t-\tau))d\tau + \int_{0}^{t+1}\sin(\pi(t-\tau))d\tau$	$y(t) = \int_{-1}^{t}\sin(\pi\tau)d\tau + \int_{t}^{1}(t-\tau+1)\sin(\pi\tau)d\tau$
$1 < t < 3$	$y(t) = \int_{t-1}^{2}\sin(\pi(t-\tau))d\tau$	$y(t) = \int_{t-2}^{1}\sin(\pi\tau)d\tau$
$3 < t$	$y(t) = 0$	$y(t) = 0$

Exercice 7 = Exercice A2-sol [Online]

(i) $h(t) = 3(\mathbb{I}(t) - \mathbb{I}(t-1))$; $u(t) = \frac{t}{2}(\mathbb{I}(t) - \mathbb{I}(t-2))$
(ii) $u(t)$ subit une symétrie orthogonale d'axe y
(iii) Les intervalles à considérer sont donc :

- Pas de chevauchement : $t < 0$ et $3 < t$
- Chevauchement partiel : $0 < t < 1$ et $2 < t < 3$
- Chevauchement complet : $1 < t < 2$

(iv)

- Pas de chevauchement ($t < 0$ et $3 < t$) : $y(t) = 0$
- Chevauchement partiel ($0 < t < 1$ et $2 < t < 3$)
  - Entrant ($0 < t < 1$) : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{3}{2}(t-\tau)d\tau = \frac{3}{2}(t\tau - \frac{\tau^2}{2})]_0^t = \frac{3}{4}t^2$
  - Sortant ($2 < t < 3$) : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{t-2}^{1} \frac{3}{2}(t-\tau)d\tau = \frac{3}{2}(t\tau - \frac{\tau^2}{2})]_{t-2}^{1} = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4} = 3 - \frac{3}{4}(t-1)^2$
- Chevauchement complet ($1 < t < 2$) : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^1 \frac{3}{2}(t-\tau)d\tau = \frac{3}{2}(t\tau - \frac{\tau^2}{2})]_0^1 = \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}$

(v) Oui, il est possible de déduire $y_3(t)$ facilement car $u_3 = \mathbb{I}(t)$ peut être obtenu par une combinaison linéaire de versions décalées de $u(t)$ et le système est LTI. Ainsi, $u_3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(t-2k)$ avec $k \in \mathbb{N}$.
La réponse $y_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\sum_{k=0}^{\infty} u(\tau-2k)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau-2k)d\tau}_{y_2(t-2k)} = \sum_{k=0}^{\infty} y_2(t-2k)$
car le système est LTI (donc un shift dans l'entrée donne un même shift dans la sortie).