TP10 : Transformée de Laplace et Fonction de Transfert

1 Concept

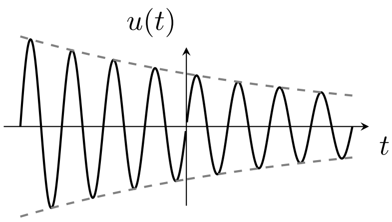
1.1 Fonction de Transfert

• Rappel domaine temporel et réponse impulsionnelle :
Le principe de superposition applicable aux systèmes linéaires et invariants (LTI) permet de trouver la réponse de tels systèmes en décomposant l'entrée $u(t)$ en une somme pondérée d'impulsions $\delta(t)$, puis en sommant la réponse du système à tous ces composants. Ce formalisme introduit la notion de *réponse impulsionnelle* $h(t)$.

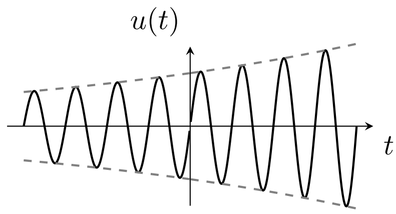
$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h(t)$$
$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Dans le domaine fréquentiel, le TP précédent aborde la transformée de Laplace. Cet outil permet de décomposer un signal arbitraire en une somme d'exponentielles de la forme e^{st}.

• Comment un système LTI modifie-t-il une entrée $u(t)$ du type $e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t}$?



Sinusoïde décroissante $\sigma < 0$



Sinusoïde croissante $\sigma > 0$

$$u(t) = e^{st} \text{ avec } s = \sigma + j\omega$$

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Il suffit de calculer la convolution du signal d'entrée et de la réponse impulsionnelle du système $h(t)$.

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) * h(t) = e^{st} * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau}h(\tau)\mathrm{d}\tau = e^{st}H(s) \end{aligned}$$

où

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau}h(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

En changeant la variable d'intégration, on obtient :

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}\mathrm{d}t}$$

Il s'agit de *la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle* ; elle est appelée la **fonction de transfert** du système.

• $H(s)$ définit totalement le système car pour tout signal exprimé sous la forme d'*une combinaison d'exponentielles* du type $e^{s_k t}$:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{s_k t}$$

on obtient en sortie

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k H(s_k) e^{s_k t}.$$

En conclusion, lorsque l'entrée est une exponentielle complexe, la sortie sera une exponentielle complexe de même fréquence mais d'amplitude et de phase modifiées par H. Pour une entrée quelconque, il suffit d'écrire cette entrée via sa décomposition en exponentielle e^{st} et d'étudier comment H affecte l'amplitude et la phase en chaque fréquence (voir TP 11 sur les diagrammes de Bode).

1.2 Convolution et fonction de transfert

Domaine temporel

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

La réponse du système LTI s'obtient en faisant la convolution de l'entrée $u(t)$ et de la réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$y(t) = h(t) * u(t).$$

Domaine fréquentiel

$$U(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

La convolution dans le domaine temporel devient un produit dans le domaine fréquentiel (voir propriété des transformées de Laplace - à savoir démontrer). On peut obtenir la transformée de Laplace de la sortie $\mathcal{L}(y(t))$ en multipliant $\mathcal{L}(u(t))$ et $\mathcal{L}(h(t))$:

$$Y(s) = H(s)U(s).$$

La démonstration est décrite page 98 [TXB - théorie].

1.3 Équation différentielle et fonction de transfert

La transformée de Laplace convertit des équations différentielles en simples équations algébriques. On démarre d'un système LTI décrit par une équation différentielle d'ordre k à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^{M_1} a_k \frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{M_2} b_k \frac{\mathrm{d}^k u(t)}{\mathrm{d}t^k}.$$

Cette équation est écrite dans le domaine temporel ; on peut appliquer la propriété de dérivation (propriété vue au TP précédent) pour facilement l'écrire dans le domaine de Laplace :

$$\sum_{k=0}^{M_1} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M_2} b_k s^k U(s).$$

La fonction de transfert (telle que $Y(s) = H(s)U(s)$) peut s'écrire :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M_2} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{M_1} a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

♡ La fonction de transfert d'un système LTI prend donc la simple forme d'une fonction **rationnelle** : quotient de deux polynômes en s. En effet, $N(s)$ (resp. $D(s)$) correspond au numérateur (resp. dénominateur) et est exprimé sous la forme d'un polynôme en s d'ordre k. Les zéros de $N(s)$ sont appelés les **zéros** de la fonction de transfert. Les zéros de $D(s)$ sont appelés les **pôles** de la fonction de transfert. Aussi nombreux que l'ordre le plus élevé de dérivation, ils donnent des informations capitales sur la stabilité, la convergence, etc.

Exemple : un système est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2\dot{u} + u.$$

On exprime cette équation dans le domaine de Laplace, en utilisant la propriété de dérivation :

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 2sU(s) + U(s).$$

On met en évidence $Y(s)$ dans le membre de gauche et $U(s)$ dans le membre de droite :

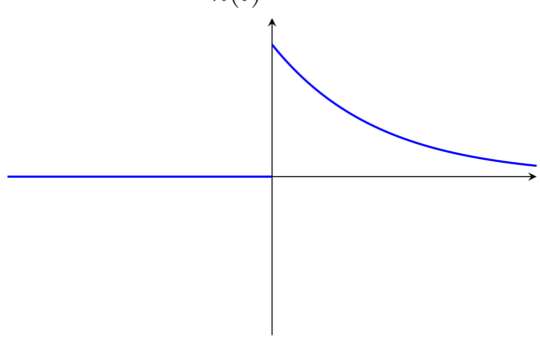
$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (2s + 1)U(s).$$

Ainsi, $Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2}U(s)$.
On extrait la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2}.$$

1.4 Causalité et stabilité

• Rappel Causalité :
Un système est dit **causal** si $y(t) = f(u(t_0)) \quad \forall t_0 \leq t$, *i.e.* si la réponse à un temps donné ne dépend que du passé et/ou du présent du système. Par conséquent, $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$. En effet, $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$. La causalité implique donc que $h(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau > t$ (ou $t - \tau < 0$). A noter que tout système physique existant est par nature causal.
La réponse impulsionnelle d'un tel système pourrait donc être de la forme



• ROC d'un système causal :
Il s'agit d'un signal de *support fini à gauche* (*i.e.* défini sur un intervalle $[T_1; +\infty[$ ou dans le cas de la Figure ci-dessus $[0; +\infty[$). Par conséquent, un système causal aura *toujours* une ROC décrite par un demi-plan, coupé parallèlement à l'axe $j\omega$ (imaginaire), limité par la partie réelle de l'exponentielle la plus grande (voir exemple 2 TP précédent).

Pourquoi ?
Une réponse impulsionnelle associée à un système causal peut s'exprimer comme une combinaison d'exponentielles e^{st} telle que :

$$h(t) = (\sum_k c_k e^{s_k t})\mathbb{1}(t).$$

Sa transformée de Laplace est donnée par :

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-st}\mathrm{d}t \text{ avec } \int_0^{\infty} |h(t)|e^{-\sigma t} < +\infty.$$

La réponse impulsionnelle étant de support fini à gauche et décrite par une combinaison d'exponentielles de type $e^{s_k t}$, la réponse impulsionnelle est donc bornée par sa plus grande exponentielle $e^{s_i t}$:

$$|h(t)| < c_i e^{\sigma_i t}.$$

Le critère de convergence peut s'écrire :

$$\int_0^{+\infty} c_i e^{\sigma_i} e^{-\sigma t} < +\infty$$

On en déduit donc que la ROC du système causal est telle que $\sigma > \sigma_i$. Il s'agit bien d'un demi-plan, coupé parallèlement à l'axe $j\omega$, limité par la partie réelle de l'exponentielle la plus grande.

On peut également exprimer la ROC en étudiant les pôles de la fonction de transfert. En effet, pour une réponse impulsionnelle du type :

$$h(t) = (\sum_k c_k e^{s_k t})\mathbb{I}(t) = c_1 e^{s_1 t}\mathbb{I}(t) + c_2 e^{s_2 t}\mathbb{I}(t) + ...,$$

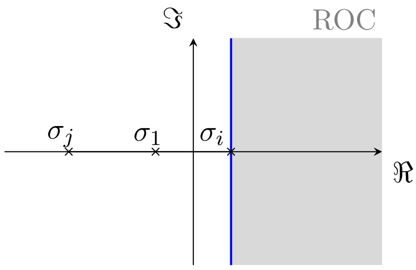
la fonction de transfert $H(s)$ est obtenue directement via les propriétés de décalage fréquentiel (voir formule en annexe) :

$$x(t) = e^{-at}\mathbb{I}(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+a} \text{ pour } ROC = \{s \in \mathcal{C} : \Re(s) > -a\}.$$

Et donc la fonction de transfert $H(s)$ de la combinaison d'exponentielles associée à la réponse impulsionnelle peut s'écrire :

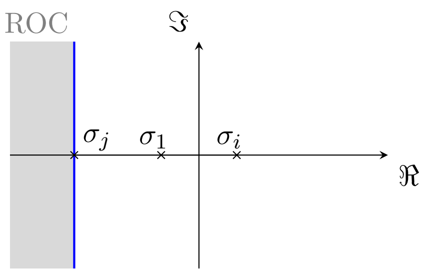
$$H(s) = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + ...$$

Pour retrouver la réponse impulsionnelle associée au système causal de manière univoque, il faut bien garantir une ROC telle que $\sigma > s_i$, s_i étant la plus grande exponentielle mais également le plus grand pôle. Sur le graphe de placement de pôle, on voit bien qu'il s'agit du pôle le plus à droite.



Pour trouver la ROC associée au système causal, on veut que la réponse impulsionnelle soit bornée à gauche ($h(t) = 0\ \forall t > 0$), et donc il suffit *d'étudier les pôles de la fonction de transfert et de prendre le demi-plan ouvert à droite, limité par le pôle le plus à droite/le pôle le plus grand ♡.*

• **ROC d'un système anti-causal :** La réponse impulsionnelle associée à un système anti-causal est telle que $h(t) = 0\ \forall t > 0$. Par un raisonnement similaire basé sur l'étude de la ROC d'un signal de support fini à droite (*i.e.* défini sur un intervalle $]-\infty; T]$), on en déduit que la ROC d'un système anti-causal est donnée par un demi-plan coupé parallèlement à l'axe $j\omega$, limité à droite par la partie réelle de la plus petite exponentielle.

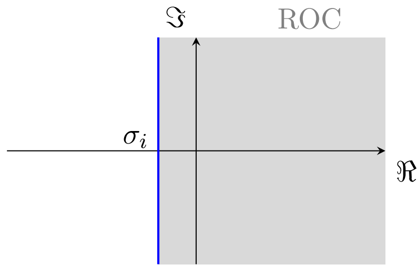


On peut également faire le lien avec la fonction de transfert exprimée sous la forme d'une expression rationnelle. Cette fonction de transfert a une ROC décrite par un demi-plan coupé parallèlement à l'axe $j\omega$, ouvert à gauche limité à droite par le pôle le plus à gauche.

- **Stabilité :**
  - Pour qu'un système **causal** soit **stable**, il faut s'assurer que l'exponentielle qui décroît le *moins vite* soit bien négative. Mathématiquement, une réponse impulsionnelle associée à un système causal est donnée par :

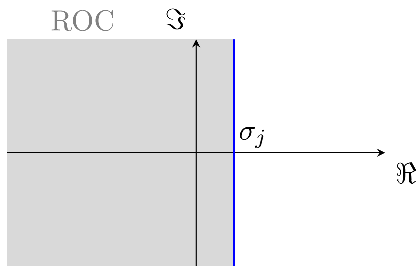
$$h(t) = a_1 e^{(\sigma_1 + j\omega_1)t} \mathbb{1}(t) + a_2 e^{(\sigma_2 + j\omega_2)t} \mathbb{1}(t) + ...$$

    Il faut que $\Re(s_k) < 0 \; \forall k$ pour garantir la stabilité du système. Il faut donc que toutes les exponentielles aient une partie réelle négative. On a alors une ROC telle que



    Le système est causal et stable.
    ♡ On peut donc résumer qu'un système causal est stable lorsque la ROC inclut l'axe $j\omega$. Autrement dit, la transformée de Laplace est définie en $\sigma = 0$ et donc la transformée de Fourier existe.
  - Pour qu'un système **anti-causal** soit stable, il faut s'assurer que l'exponentielle avec le facteur le plus petit (le plus à gauche sur l'axe) soit bien positive. Il faut que toutes les exponentielles aient une partie réelle positive.

$$h(t) = a_1 e^{(\sigma_1 + j\omega_1)t} \mathbb{1}(-t) + a_2 e^{(\sigma_2 + j\omega_2)t} \mathbb{1}(-t)$$



    Le système est anti-causal et stable.
    ♡ On peut donc résumer le critère tel qu'un système anti-causal est stable lorsque la ROC (demi-plan ouvert à gauche et borné à droite) inclut l'axe $j\omega$. Autrement dit, la transformée de Laplace est définie en $\sigma = 0$ et donc la transformée de Fourier existe.

Un système est dit **BIBO stable** (ce qui est clairement souhaitable habituellement : Bounded Input $\implies$ Bounded Output) s'il existe une valeur finie $K > 0$ telle que, pour toutes les paires entrée-sortie $(u(t), y(t))$ solutions du système, on a

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |y(t)| \leq K \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|,$$

signifiant que n'importe quelle entrée bornée donnera une sortie bornée.
Certains systèmes menant à des phénomènes de résonance importants ne sont pas BIBO stables car il existe une entrée telle que la sortie est non bornée. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit BIBO stable est que l'axe imaginaire soit compris dans la ROC de la fonction de transfert (c'est aussi équivalent à dire que $h(t)$ est intégrable). On a donc BIBO stable $\iff$ Transformée de Fourier existe.
$\rightarrow$ Lire section 8.3 [TXB-Théorie] pour des explications plus détaillées.

- **En pratique**, pour déterminer la causalité et la stabilité d'une fonction de transfert :

- pour un système **causal**, il faut bien s'assurer que la ROC est un demi-plan, coupé parallèlement à l'axe $j\omega$, **limité à gauche par le pôle le plus à droite**. Pour qu'il soit stable, il faut en plus s'assurer que tous les pôles sont à partie réelle négative.
- pour un système **anti-causal**, la ROC est caractérisée par un demi-plan **limité à droite par le pôle le plus à gauche**.
- autrement, le système est non-causal pour les autres valeurs de σ.
- pour que le système soit **stable** peu importe sa causalité, il faut que la ROC **contienne l'axe des ordonnées/l'axe** $j\omega$, *i.e.* qu'elle contienne $\sigma = 0$. La réponse impulsionnelle est caractérisée par des exponentielles décroissantes telles que : $e^{-\alpha t}\mathbb{I}(t)$ avec $\alpha > 0$ ou $e^{\alpha t}\mathbb{I}(-t)$. La fonction échelon permet de ne considérer que la région convergente de l'exponentielle.

1.5 Réponse des systèmes LTI : Transformée bilatérale

On considère un système causal dont la dynamique est décrite par l'équation différentielle suivante : $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t) = a\mathbb{I}(t)$, $\boxed{y(0) = \dot{y}(0) = 0}$ (condition de repos initial obligatoire pour les transformées bilatérales).
Peut-on évaluer la réponse du système uniquement grâce à la fonction de transfert ?
On évalue la fonction de transfert depuis l'équation différentielle

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

L'entrée peut facilement s'exprimer avec sa transformée de Laplace, en utilisant la transformée de Laplace de $\mathbb{I}(t)$ et la propriété de linéarité pour a :

$$u(t) = a\mathbb{I}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{a}{s}.$$

Par conséquent, on calcule aisément la transformée de Laplace de la sortie :

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)U(s) \\ &= \frac{a}{s(s^2 + 3s + 2)} \ , \ \Re(s) > 0. \end{aligned}$$

Ensuite, on décompose la réponse $Y(s)$ en fractions simples afin de simplier l'expression :

$$= \frac{a}{2s} - \frac{a}{s+1} + \frac{a}{2(s+2)} \ , \ \Re(s) > 0.$$

Pour obtenir la sortie du système $y(t)$ à partir de sa transformée de Laplace $Y(s)$, il suffit d'utiliser les tables de propriétés.
On sait que

$$x(t) = \mathbb{I}(t)e^{-at} \ , \ a > 0 \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a} \ , \ \Re(s) > -a$$

pour une système causal. On se rend alors compte que $Y(s)$ est une somme de termes de la forme de $X(s)$, avec différents coefficients et différentes valeurs de a. Par linéarité, la transformée d'une somme de termes est la somme des transformées de ces termes. On obtient

$$y(t) = a\left(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)\mathbb{I}(t).$$

La réponse du système (= sa sortie) est donc une combinaison d'exponentielles, dont les facteurs sont les *pôles* de la fonction de transfert.

1.6 Réponse des systèmes LTI : Transformée unilatérale

Il est très fréquent que le système possède des conditions initiales non nulles (on parle de *non-zero state*). On définit alors la **transformée de Laplace unilatérale**

$$\boxed{X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t.}$$

La transformée de Laplace unilatérale d'un signal $x(t)$ est la transformée bilatérale du signal $x(t)\mathbb{1}(t)$. Dés lors, la ROC de la transformée unilatérale est toujours un demi-plan ouvert à droite. La grande différence entre les transformées unilatérales et bilatérales réside dans la propriété de différentiation (voir section 8.1 [TXB-Théorie]) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &\xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} sX(s) - x(0^-)\\ \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} &\xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)\end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned}\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = a\mathbb{1}(t) \quad &, \boxed{y(0^-) = y_0 \ \ , \ \dot{y}(0^-) = y_0'}\\ \Longrightarrow s^2Y(s) - y_0 s - y_0' + 3sY(s) - 3y_0 + 2Y(s) &= \frac{a}{s}\\ \Longleftrightarrow Y(s) = \frac{y_0(s+3)}{s^2+3s+2} + \frac{y_0'}{s^2+3s+2} &+ \frac{a}{s(s^2+3s+2)}\end{aligned}$$

♡ Les deux premiers termes de $Y(s)$ correspondent à la **réponse libre** du système, *i.e.* une combinaison d'exponentielles complexes dont les coefficients sont déterminés par la fonction de transfert et les conditions initiales. Le dernier terme correspond à la **réponse forcée** du système, *i.e.* la réponse à l'entrée, à conditions initiales nulles. La sortie d'un système LTI est donc la somme d'une réponse libre et d'une réponse forcée. Les pôles de la fonction de transfert déterminent les modes du système, c'est-à-dire sa réponse naturelle.

Pour bien saisir la différence entre réponse libre et réponse forcée, prenons l'exemple d'un système masse-ressort à la verticale. La réponse libre du système correspond dans ce cas à son mouvement lorsque l'expérimentateur·rice décide de démarrer la masse à une position donnée. Les conditions initiales de l'objet sont déterminées. Ensuite, l'objet est relâché et va osciller. Cette réponse est uniquement une conséquence de la dynamique interne et n'est influencée que par la position initiale. En opposition, si l'expérimentateur·rice applique une force constante à l'objet, la réponse de celui-ci est gouvernée par cette entrée. Il s'agit donc de la réponse forcée.

1.7 Représentation d'état et fonction de transfert

On a

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x}(t) &=& Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &=& Cx(t) + Du(t)\end{array}\right. \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad \left\{\begin{array}{rcl}sX(s) &=& AX(s) + BU(s)\\ Y(s) &=& CX(s) + DU(s)\end{array}\right.$$

en utilisant la propriété de dérivation temporelle.

On calcule la fonction de transfert telle que :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

(développement simple à savoir faire).

♡ La **réponse totale** d'un système LTI caractérisé par les matrices A, B, C, D soumis à une entrée $u(t)$ et ayant des conditions initiales $x(0)$ est donnée par :

$$Y_{tot}(s) = H(s)U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0)$$

avec le premier terme associé à la réponse forcée et le deuxième terme associé à la réponse libre du système (développement simple à savoir faire).

Les pôles de $H(s)$ sont donc les valeurs telles que $\det(sI - A) = 0$, *i.e.* les valeurs propres de A. Les pôles de la fonction de transfert ont le même rôle que les valeurs propres : pour un système causal, s'ils sont négatifs, le système est stable et s'ils sont positifs, le système est instable ! ♡

A ce stade, il est important de se rendre compte que causalité, stabilité (valeurs propres) et ROC sont totalement liées. N'hésitez pas à parcourir plusieurs fois les différents rappels pour être certain·e que vous comprenez les liens entre les différentes représentations : domaine temporel, domaine fréquentiel, décomposition en exponentielle $e^{j\omega t}$, décomposition en exponentielle $e^{(\sigma+j\omega)t}$, ...

Notions clés

- Comprendre le concept de décomposition de tout signal sous la forme e^{st}.
- Définir la fonction de transfert à partir de la réponse impulsionnelle.
- Comprendre la dualité convolution avec la réponse impulsionnelle $h(t)$ dans le domaine temporel versus produit avec la fonction de transfert $H(s)$ dans le domaine fréquentiel.
- Maîtriser la transformation d'une équation différentielle dans le domaine de Laplace à l'aide des propriétés.
- Calculer la fonction de transfert à partir d'une équation différentielle (équation entrée-sortie).
- Comprendre pourquoi la ROC associée au système causal (resp. anti-causal) est définie par la région délimitée à gauche (resp. à droite) par le pôle le plus à droite (resp. à gauche). Pour cela, il faut maîtriser la notion de causalité avec une réponse impulsionnelle définie sur $t \geq 0$. Ensuite, il faut avoir en tête la notion d'intégrabilité et de convergence de $h(t)$. Finalement, avec le passage dans le domaine de Laplace à l'aide de la propriété de décalage fréquentiel, les pôles de la fonction de transfert entrent en jeu.
- Distinguer la réponse libre de la réponse forcée du système.
- Calculer la réponse libre et la réponse forcée depuis la représentation d'état.

2 Exercices résolus au tableau

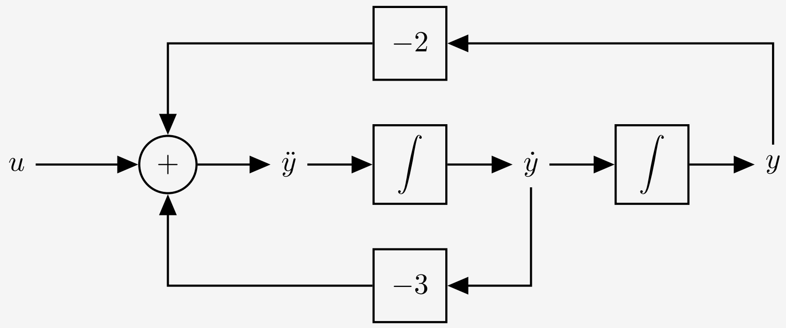
Exercice 1 = Exercice 7.2 [TXB]

Considérons les systèmes LTI en temps continu pour lesquels l'entrée u et la sortie y sont liées par $\ddot{y} + \dot{y} - 2y = u$.

a) Trouver l'expression algébrique de la fonction de transfert $H(s)$ de ces systèmes.

b) Discuter la région de convergence de $H(s)$ et déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ dans les trois cas suivants : *(i)* le système est causal, *(ii)* le système est stable, *(iii)* le système est anti-causal.

Exercice 2 = Janvier 2018 - Q2 (sauf (vii))
Soit le système LTI causal représenté par le bloc diagramme suivant :



(i) Donner une représentation d'état A,B,C et D du système.

(ii) Montrer que la fonction de transfert du système est donnée par $H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$

(iii) Identifier les zéros, pôles et la région de convergence associés à la fonction de transfert du système.

(iv) Ce système est-il stable ? Justifier.

(v) Quelle est la réponse impulsionnelle du système ?

(vi) Ce système est alors soumis à une entrée $u(t) = e^{-3t}\mathbb{1}(t)$ avec comme conditions initiales $y(0-) = 1$ et $\dot{y}(0-) = 0$. Calculer la réponse totale du système. Spécifier la partie correspondant à la réponse forcée $y_f(t)$ et celle correspondant à la réponse libre $y_l(t)$ du système.

3 Exercices à faire

Exercice 3 =Exercice 7.10 [TXB]
Etude de ROC et implication sur la forme de la réponse impulsionnelle

Soit la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}.$$

a) Combien de systèmes LTI différents peuvent être associés à $H(s)$ et pourquoi ? Étudier la causalité et la stabilité de chacun d'entre eux.

b) Étudier la stabilité de chaque réponse impulsionnelle associée aux différents systèmes ; indiquer l'origine des instabilités.

c) Calculer la réponse impulsionnelle du système LTI stable associé à $H(s)$.

Exercice 4 = Exercice 7.3 [TXB]

Un système LTI causal est caractérisé par la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+6}.$$

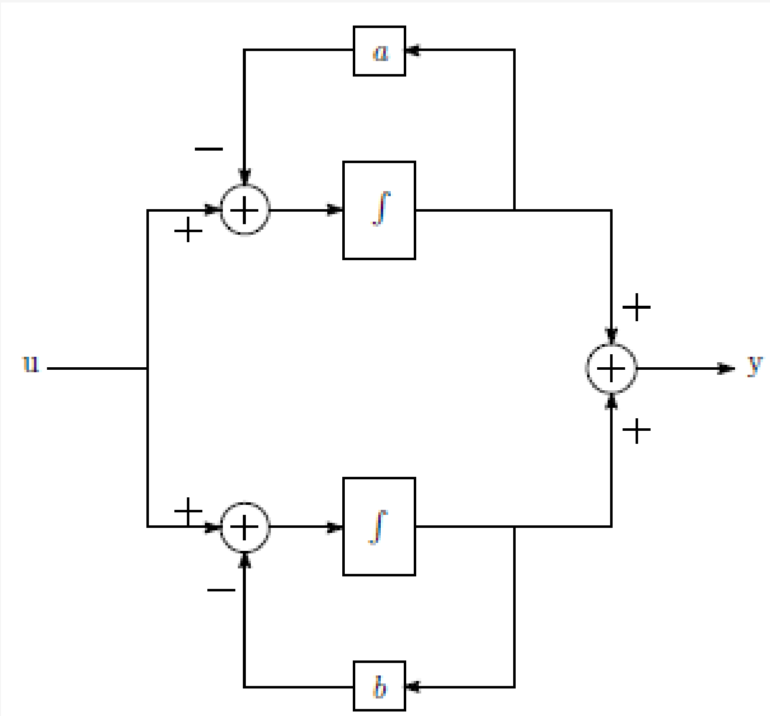
a) Donner une équation différentielle reliant l'entrée et la sortie.

b) Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système.

c) Quelle sera la sortie si l'entrée est $e^{-4t}(1-t)\mathbb{I}(t)$?

Exercice 5 = Janvier 2019 - Q2 (i) → (v)

On donne le bloc diagramme suivant avec $0 < a < b$



(i) Donner une représentation d'état A, B, C et D du système.

(ii) Déterminer la fonction de transfert $H(s)$. Si vous utilisez une formule directe, démontrez-la.

(iii) Identifier les zéros, pôles et les différentes régions de convergence. Quelle région de convergence est associée au système stable ?

(iv) Calculer la réponse impulsionnelle associée au système causal.

(v) Ce système est soumis a une entrée $u(t) = \mathbb{I}(t)$ avec comme conditions initiales $y(0-) = 1$ et $\dot{y}(0-) = 1$. Calculer la réponse totale du système. Spécifier la partie correspondant à la réponse forcée $y_f(t)$ et celle correspondant à la réponse libre $y_l(t)$ du système. Expliquer ce que signifie réponse libre et réponse forcée. Si vous utilisez une formule directe, démontrez la.

Exercice 6 = Septembre 2016 - Q1 (iii)-(iv)-(vi)

Soit l'équation entrée-sortie

$$\ddot{y} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{R_1 C}\dot{u}$$

(iii) Donner la fonction de transfert du système.

(iv) Soient $R_1 = 2\Omega, R_2 = \frac{2}{3}\Omega, L = \frac{2}{3}H, C = 0.5F$. Donner la région de convergence du système stable et causal correspondant. Justifiee.

(vi) Donner la réponse impulsionnelle du système.

4 Pour s'exercer

Exercice 7 = Exercice 7.1 [TXB]
- Calcul de réponse d'un système depuis sa fonction de transfert -

La sortie d'un système LTI causal est $y(t) = 2e^{-3t}\mathbb{1}(t)$ lorsque l'entrée est $u(t) = \mathbb{1}(t)$.

a) Trouver la fonction de transfert $H(s)$ du système et en déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$.

b) Trouver la sortie $y(t)$ quand l'entrée est $u(t) = e^{-t}\mathbb{1}(t)$.

c) Trouver la sortie $y(t)$ quand l'entrée est $u(t) = e^{-t}$.

Exercice 8 = Exercice 7.7 [TXB]

Répondre par vrai ou faux et justifier brièvement.

a) Le système causal décrit par l'équation suivante est instable.

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + y(t) = u(t)$$

b) Un système causal est nécessairement stable.

c) Soit $H(s)$ la fonction de transfert d'un système stable. Le système de fonction de transfert $H_2(s) = 10H(s)$ a un temps de réponse approximativement dix fois plus court.

d) Le système décrit par $y(t) = u(t-2)$ est BIBO stable.

TP10

Exercice 1 = Exercice 7.2 [TXB]

a) En utilisant la propriété de dérivation temporelle : $\dot{x}(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s)$, on trouve $s^2Y(s) + sY(s) + 2Y(s) = U(s)$. Ainsi, $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+s+2} = \frac{1}{(s+2)(s-1)}$ avec 3 ROC possibles.

b) La décomposition en fractions simples donne

$$H(s) = \frac{1}{3(s-1)} - \frac{1}{3(s+2)}$$

(i) Système causal : ROC $= \{s \in \mathbb{C} : \sigma = \mathcal{R}e\{s\} > 1\}$ et $h(t) = \frac{1}{3}e^t \mathbb{1}(t) - \frac{1}{3}e^{-2t}\mathbb{1}(t)$ en utilisant la transformée de Laplace inverse.

(ii) Système non causal (stable) : ROC $= \{s \in \mathbb{C} : -2 < \sigma = \mathcal{R}e\{s\} < 1\}$ et $h(t) = \frac{-1}{3}e^t \mathbb{1}(-t) - \frac{1}{3}e^{-2t}\mathbb{1}(t)$ en utilisant la transformée de Laplace inverse.

(iii) Système anti-causal :
ROC $= \{s \in \mathbb{C} : \sigma = \mathcal{R}e\{s\} < -2\}$ et $h(t) = \frac{-1}{3}e^t \mathbb{1}(-t) + \frac{1}{3}e^{-2t}\mathbb{1}(-t)$ en utilisant la transformée de Laplace inverse.

Exercice 2 = Janvier 2018 - Q2

(i) Puisque les variables d'états sont des accumulateurs d'énergie, en regardant le bloc diagramme donné, on en déduit que nos variables d'état seront $x_1 = y$ et $x_2 = \dot{y}$ (parce que ces variables sortent des blocs d'intégration = accumulation). On a alors $\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$ et $\dot{x}_2 = \ddot{y} = -3\dot{x}_2 - 2x_1 + u$ (en lisant le bloc diagramme). On en déduit facilement les matrices A, B, C et D :

$$A = [0\ 1; -2\ \ -3]; B = [0; 1]; C = [1\ 0]; D = 0$$

(ii) L'équation entrée-sortie est donnée par

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u$$

En utilisant la propriété de dérivation temporelle ($\dot{x}(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s)$), on a

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = U(s) \leftrightarrow H(s)\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

ce qui est bien la fonction annoncée.

(iii) Les zéros sont les valeurs s pour lesquelles le numérateur de $H(s)$ est nul. Ainsi, il n'y a pas de zéro puisque le numérateur est une constante.
Les pôles sont les valeurs s pour lesquelles le dénominateur est nul. Ainsi, en factorisant le dénominateur, on trouve 2 pôles en $s = -1$ et $s = -2$.
Puisque le système est causal (donné dans l'énoncé), on en déduit que la région de convergence est $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \sigma = \mathcal{R}e\{s\} > -1\}$

(iv) Oui, ce système est stable car la région de convergence (ROC) comprend l'axe imaginaire (NB : Donc la transformée de Fourier existe).

(v) La décomposition de $H(s)$ en fractions simples donne

$$H(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

En utilisant les transformées de Laplace inverses et puisque le système est causal on trouve $h(t) = (-e^{-2t} + e^{-t})\mathbb{1}(t)$

(vi) On a $Y(s) = Y_l(s) + Y_f(s) = C(sI - A)^{-1}x[0] + H(s)U(s)$. Il faut donc trouver le terme $x(0)$. On sait que $y = x_1$ donc $y(0-) = x_1(0-) = 1$. On a aussi $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$ donc $\dot{y}(0-) = x_2(0-) = 0$. De plus, la transformée de Laplace de $u(t)$ donne $U(s) = \frac{1}{s+3}$. On trouve alors

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s^2+3s+2}[1\ 0][s+3\ 1; -2\ s][1;0] + \frac{1}{s^2+3s+2} \cdot \frac{1}{s+3} \\
&= \frac{1}{s^2+3s+2}[1\ 0][s+3; -2] + \frac{1}{s^2+3s+2} \cdot \frac{1}{s+3} \\
&= \frac{s+3}{s^2+3s+2} + \frac{1}{s^2+3s+2} \cdot \frac{1}{s+3} \\
&= \underbrace{\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}}_{Y_l(s)} + \underbrace{\frac{-1}{s+2} + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+3)}}_{Y_f(s)}
\end{aligned}$$

Au final, on trouve

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = \underbrace{-e^{-2t}\mathbb{I}(t) + 2e^{-t}\mathbb{I}(t)}_{y_l(t)} + \underbrace{-e^{-2t}\mathbb{I}(t) + 0.5e^{-t}\mathbb{I}(t) + 0.5e^{-3t}\mathbb{I}(t)}_{y_f(t)}$$

Exercice 3 = Exercice 7.1 [TXB]

a) 3 systèmes différents car 3 ROC possibles :
   - Système anti-causal instable pour $\Re(s) < -2$;
   - Système non-causal stable pour $-2 < \Re(s) < 1$;
   - Système causal instable pour $\Re(s) > 1$.

b)
   - Système anti-causal : $h(t) = \frac{-1}{3}e^t\mathbb{I}(-t) + \frac{1}{3}e^{-2t}\mathbb{I}(-t)$. L'instabilité vient du deuxième terme : $|h(t)|$ croît exponentiellement pour $t \to -\infty$.
   - Système stable : $h(t) = \frac{-1}{3}e^t\mathbb{I}(-t) - \frac{1}{3}e^{-2t}\mathbb{I}(t)$. Les deux termes sont stables : $|h(t)|$ décroît exponentiellement pour $t \to \pm\infty$. En effet, les exponentielles sont considérées dans leur partie décroissante.
   - Système causal : $h(t) = \frac{1}{3}e^t\mathbb{I}(t) - \frac{1}{3}e^{-2t}\mathbb{I}(t)$. L'instabilité vient du premier terme : $|h(t)|$ croît exponentiellement pour $t \to +\infty$.

c) $h(t) = \frac{-1}{3}e^t\mathbb{I}(-t) - \frac{1}{3}e^{-2t}\mathbb{I}(t)$. (voir ex1)

Exercice 4 = Exercice 7.3 [TXB]

a) $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 4u(t) + \dot{u}(t)$, en utilisant la propriété de dérivation temporelle ($\dot{x}(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s)$)

b) On a $H(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}$ avec $ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > -2\}$ puisque le système est causal. La décomposition en fractions simples donne $H(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+3}$. En utilisant la transformée de Laplace inverse, on a $h(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})\mathbb{I}(t)$.

c) La transformée de Laplace de $u(t)$ est $U(s) = \frac{1}{s+4} - \frac{1}{(s+4)^2}$ en utilisant la propriété de décalage fréquentiel et de dérivation fréquentielle respectivement. Ainsi, on a

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} - \frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

En décomposant en fractions simples et en utilisant la transformée de Laplace inverse, on trouve $y(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{-4t})\mathbb{I}(t)$.

Exercice 5 = Janvier 2019 - Q2 (i) $\to$ (v)

(i) Il suffit d'écrire le bloc diagramme sous forme d'équations avec x_1 (resp. x_2) la variable d'état qui sort de l'intégrateur du haut (resp. du bas). On a alors

$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_1 &= -ax_1 + u \\ \dot{x_2} &= -bx_2 + u \end{aligned}$$

En écrivant les équations sous forme matricielle, on obtient la représentation d'état :

$$A = [-a \quad 0; 0 \quad -b]; B = [1; 1]; C = [1 \quad 1]; D = 0$$

(ii) On a $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ (à démontrer). On remplace par les matrices obtenues précédemment :

$$H(s) = [1 \quad 1] \underbrace{\left[\frac{1}{s+a} \quad 0; 0 \quad \frac{1}{s+b}\right][1; 1]}_{\left[\frac{1}{s+a}; \frac{1}{s+b}\right]} = \frac{2s + (a+b)}{(s+a)(s+b)}$$

(iii) Les zéros sont les valeurs s pour lesquelles le numérateur de $H(s)$ vaut 0. On obtient alors 1 zéro en $s = -\frac{a+b}{2}$
Les pôles sont les valeurs s pour lesquelles le dénominateur de $H(s)$ vaut 0. On trouve alors 2 pôles en $s = -a$ et $s = -b$.
Sachant que $0 < a < b$:
La région de convergence du système anti-causal vaut $\{s \in \mathbb{C} : \sigma = \mathcal{R}e\{s\} < -b\}$
La région de convergence du système causal vaut $\{s \in \mathbb{C} : \sigma = \mathcal{R}e\{s\} > -a\}$
La région de convergence du système non causal vaut $\{s \in \mathbb{C} : -b < \sigma = \mathcal{R}e\{s\} < -a\}$
La région de convergence associée au système stable doit contenir l'axe imaginaire ; ainsi, la région de convergence associée au système stable correspond à celle du système causal.

(iv) La décomposition de $H(s)$ en fractions simples donne

$$H(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b}$$

On a alors $h(t) = (e^{-at} + e^{-bt})\mathbb{1}(t)$

(v) On peut décomposer la solution comme

$$Y(s) = Y_f(s) + Y_l(s) = H(s)U(s) + C(sI - A)^{-1}x[0]$$

(Démonstration et explication des termes)
Réponse forcée : $Y_f(s) = H(s)U(s) = \frac{2s+(a+b)}{(s+a)(s+b)} \cdot \frac{1}{s}$. La décomposition en fractions simples de $Y_f(s)$ donne

$$Y_f(s) = -\frac{1/a}{s+a} - \frac{1/b}{s+b} + \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{1}{s}$$

En utilisant les transformées de Laplace inverse, on a $y_f(t) = (\frac{-1}{a}e^{-at} - \frac{1}{b}e^{-bt} + \frac{a+b}{ab})\mathbb{1}(t)$
Réponse libre : $Y_l(s) = C(sI - A)^{-1}x[0]$. il faut donc trouver le terme $x(0)$. On a

$$\begin{aligned} y(0-) &= x_1(0-) + x_2(0-) = 1 \\ \dot{y}(0-) &= \dot{x}_1(0-) + \dot{x}_2(0-) \\ &= -ax_1(0-) - bx_2(0-) \end{aligned}$$

En résolvant ce petit système, on trouve $x_1(0-) = \frac{b+1}{b-a}$ et $x_2(0-) = \frac{-a-1}{b-a}$. Ainsi,

$$Y_l(s) = \left[\frac{1}{s+a} \quad \frac{1}{s+b}\right][x_1(0-);\ x_2(0-)]$$

En utilisant les transformées de Laplace inverses, on a $y_l(t) = (x_1(0-)e^{-at} + x_2(0-)e^{-bt})\mathbb{1}(t)$
On en déduit la réponse totale du système :

$$y(t) = y_f(t) + y_l(t) = \left((-1/a + x_1(0-))e^{-at} + (-1/b + x_2(0-))e^{-bt} + \frac{a+b}{ab}\right)\mathbb{1}(t)$$

Exercice 6 = Septembre 2016 - Q1 (iii)-(iv)-(vi)

(iii) En utilisant la propriété de dérivation temporelle ($\dot{x}(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s)$), on trouve

$$H(s) = \frac{\frac{s}{R_1 C}}{s^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)s + \frac{1}{LC}}$$

(iv) En remplaçant les paramètres par les valeurs données, on obtient

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s}{(s+3)(s+1)}$$

Les pôles sont donc $s = -1$ et $s = -3$. Pour que le système soit causal, la ROC doit être un demi-plan ouvert à droite. Pour que le système soit stable, la ROC doit inclure l'axe imaginaire. Ainsi, la région de convergence du système stable et causal correspond à

$$ROC = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{s\} > -1\}$$

(vi) La décomposition de $H(s)$ en fractions simples donne : $H(s) = \frac{-0.5}{s+1} + \frac{1.5}{s+3}$. Ainsi, en utilisant les transformées de Laplace inverse, la réponse impulsionnelle est

$$h(t) = \frac{1}{2}(-e^{-t} + 3e^{-3t})\mathbb{I}(t)$$

Exercice 7 = Exercice 7.1 [TXB]

a) On a $Y(s) = \frac{2}{s+3}$ et $U(s) = 1/s$ en utilisant les transformées de Laplace. On en déduit $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s}{s+3}$ avec ROC $= \{s \in \mathbb{C}\sigma > -3\}$ puisque le système est causal (voir énoncé) ; $h(t) = 2\delta(t) - 6e^{-3t}\mathbb{I}(t)$.

b) On a $U(s) = \frac{1}{s+1}$ donc $Y(s) = \frac{2s}{(s+3)(s+1)} = \frac{3}{s+3} - \frac{1}{s+1}$ donc $y(t) = \left(3e^{-3t} - e^{-t}\right)\mathbb{I}(t)$.

c) On a $u(t) = e^{-t}\mathbb{I}(t) + e^{-t}\mathbb{I}(-t)$. Lorsque l'on veut calculer la transformée de Laplace de $u(t)$, la ROC associée au premier terme est en contradiction avec celle associée au second : on a en effet $s > -1$ et $s < -1$, respectivement. De manière peu rigoureuse, on peut considérer le cas "limite" $s = -1$, pour lequel $H(s = -1) = -1$, et pour lequel le système multiplie l'entrée par un facteur -1, ce qui donne $y(t) = -e^{-t}$.
Il vaut cependant mieux dans ce cas rester/revenir dans le domaine temporel et faire la convolution entre $u(t)$ et $h(t)$ (fonction déterminée plus tôt). On a dans ce cas $y(t) = u(t) * h(t) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau - 6\int_0^{+\infty} e^{-3\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau = 2e^{-t} - 3e^{-t} = -e^{-t}$.

Exercice 8 = Exercice 7.7 [TXB]

a) vrai (pôles en $s = -2.2056; s = 0.1028 + 0.6655j; s = 0.1028 - 0.6655j \rightarrow ROC = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0.1028\}$).

b) faux (cf. celui ci-dessus).

c) faux (le second système a le même temps de réponse ; c'est l'amplitude qui changera).

d) vrai ($H(s) = e^{-2s}; \omega \rightarrow +\infty \Rightarrow H(s) \rightarrow 0$ so bounded).